Zusammenfassung Vektorrechnung und Komplexe Zahlen

Michael Goerz

8. April 2006

Inhalt

1 Vektoren, Geraden und Ebenen

1.1 Länge eines Vektors

Die Länge eines Vektors ist die Wurzel aus der Summe der Quadrate seiner Koordinaten.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Bsp.:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (7)^2} = \sqrt{74} = 8.607$$

Einheitsvektor: Ein Einheitsvektor ist ein Vektor der Länge 1.

$$a_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

Bsp.:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{74}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{74}}{74} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1.2 Skalarprodukt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Bsp.:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-3)(-7) + 7 \cdot 2 + (-5) \cdot 1 = 30$$

Winkel zwischen zwei Vekoren

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \end{aligned}$$

Bsp.:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{(-3)(-7) + 7 \cdot 2 + (-5) \cdot 1}{\sqrt{(-3)^2 + (7)^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{(7)^2 + (2)^2 + (1)^2}} \\ \Rightarrow \alpha &= 63.38^\circ \end{aligned}$$

1.3 Darstellungen der Ebene

1.3.1 Normalenform der Ebene

Die Normalenform einer Ebene lautet: $E:\ [\vec{x} - \vec{p}] \cdot \vec{n} = 0$.

Normalenform aus Parametergleichung

- Bestimmung des Normalenvektors $\vec{n}$.
- Aufstellung der Normalenform.

$$E:\ \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

$$\begin{aligned} \text{I)}\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ \text{II)}\ \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \end{aligned}$$

Bsp.:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{I) } & n_1 + n_2 + n_3 = 0 \\ \text{II) } & 2n_1 - n_2 + 4n_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots \\ n_2 &= \frac{2}{3} n_3, \quad n_3 \text{ sei gleich } 3 \\ \Rightarrow n_2 &= 2 \\ \Rightarrow n_1 &= -5 \\ \vec{n} &= \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

Normalenform aus Koordinatenform

- Normalenvektor kann abgelesen werden ($E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + r = 0$)
- Punkt der Ebene bestimmen (x_1 und x_2 festlegen, x_3 bestimmen)
- Aufstellung der Normalenform

Normalenform aus Gerade und Punkte

- Differenzvektor $\vec{QP}$ bilden
- $\vec{n}$ aus $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ und $\vec{PQ} \cdot \vec{n} = 0$ bestimmen
- Aufstellung der Normalenform

Normalenform aus drei Punkten

- Zwei Differenzvektoren bilden
- $\vec{n}$ bestimmen
- Aufstellung der Normalenform

Normalenform aus zwei parallelen Geraden

- Differenzvektor $\vec{PQ}$ der Stützvektoren bestimmen
- $\vec{n}$ bestimmen
- Aufstellung der Normalenform

Normalenform aus zwei Geraden

- $\vec{n}$ aus den beiden Richtungsvektoren bestimmen
- Aufstellung der Normalenform

1.3.2 Parameterform aus Koordinatenform

Die Parameterform einer Ebene lautet $E:\ \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$.

- Drei Punkte suchen
- $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind Differenzvektoren verschiedener Punkte
- Aufstellung der Parameterform

Bsp.:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \ \Leftrightarrow\ x_3 = \frac{1}{2}(1 - x_1 + x_2)$$

$$A(2|1|0),\ B(4|1|1),\ C(1|0|0)$$

$$\vec{u} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \vec{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.3.3 Koordinatenform aus Normalenform

Man erhält die Koordinatenform durch ausmultiplizieren der Normalenform.

$$E:\ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$E:\ n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - (p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3)$$

Bsp.:

$$E:\ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$E:\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - (2 + 6 - 1) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 7 = 0$$

1.4 Orthogonalität von Geraden und Ebenen

zwei Geraden Zwei Geraden sind orthogonal wenn ihre Richtungsvektoren orthogonal sind. Dies gilt auch für windschiefe Geraden.
Bsp:

$$g_1:\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix};\quad g_2:\ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 12 + 0 - 12 = 0 \quad \Rightarrow g_1 \text{ und } g_2 \text{ sind orthogonal}$$

zwei Ebenen Zwei Ebenen sind orthogonal wenn ihre Normalenvektoren orthogonal sind.

eine Gerade und eine Ebene Eine Gerade und eine Ebene sind orthogonal, wenn der Normalenvektor und der Richtungsvektor der Geraden linear abhängig sind.

1.5 Achsenschnittpunkte

Man berechnet den Schnittpunkt mit der

- x_1-Achse, indem man $x_2 = x_3 = 0$ setzt.
- x_2-Achse, indem man $x_1 = x_3 = 0$ setzt.
- x_3-Achse, indem man $x_1 = x_2 = 0$ setzt.

Bsp.:

$$E:\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 9$$
$$S_1(9/5|0|0)$$
$$S_2(0|-9/4|0)$$
$$S_3(0|0|9)$$

1.6 Lagebestimmung von Gerade und Ebene

Zwei Geraden: Man ermittelt die Lagebeziehung zweier Geraden, indem man ihre Gleichungen gleich setzt. Zwei Geraden

- schneiden sich bei einer Lösung des LGS.
- sind gleich bei unendlich vielen Lösungen des LGS
- sind parallel bei keiner Lösung des LGS und wenn die Richtungsvektoren linear abh. sind.
- sind windschief bei keiner Lösung des LGS und wenn die Richtungsvektoren linear unabh. sind.

Zwei Ebenen

- sind gleich, wenn ihre Koordinatengleichungen gleich sind.
- sind parallel, wenn ihre Normalenvektoren linear abhängig sind.
- schneiden sich, wenn ihre Normalenvektoren linear unabhängig sind. Für den Schnittwinkel gilt
$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}}$$

Eine Gerade und eine Ebene: Man ermittelt die Lagebeziehung einer Gerade und einer Ebene, indem die Geradengleichung koordinatenweise in die Koordinatengleichung der Ebene einsetzt. Die Gerade

- liegt auf der Ebene, wenn sich eine allgemeingültige Aussage ergibt.
- ist parallel zur Ebene, wenn sich eine falsche Aussage ergibt.
- schneidet die Ebene in dem Punkt mit dem Parameter r, wenn sich für r ein konkreter Wert ergibt. Für den Winkel zwischen Gerade und Ebene gilt
$$\sin(\alpha) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{u}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}}$$

Bsp.:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$E:\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 13$$
$$2(1-r)(2+6r) - 3(-1+2r) = 13 \ \Rightarrow\ -2r + 7 = 13 \ \Rightarrow\ r = -3$$
$$S(4|-16|-7)$$
$$\alpha = 4,79^\circ$$

2 Abstände

2.1 Abstand eines Punktes von einer Ebenen

Den Abstand eines Punktes von einer Geraden ermittelt man mit Hilfe der Hesseschen Normalenform

$$d = (\vec{x} - \vec{p}) \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - r}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Für x werden die Koordinaten des Punktes eingesetzt, z.Bsp.:

$$E: \ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 9; \qquad R: (8|4|1)$$

$$d = \frac{3 \cdot 8 - 1 \cdot 4 + 5 \cdot 1 - 9}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 5^2}} = 2.7$$

2.2 Abstand eines Punktes P von einer Geraden g im $\mathbb{R}^2$

- Bestimme eine Gerade h, die senkrecht auf g steht und durch den Punkt P geht.
- Bestimme den Schnittpunkt S von g und h.
- Bestimme die Länge des Vektors $\vec{SP}$.

Bsp.:

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad P: \ (4|9)$$

$$H: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g = h \ \Rightarrow \ s = -2.4 \ \Rightarrow \ r = 0.2 \ \Rightarrow \ S(1.6|1.8|)$$

$$d = \sqrt{(4 - 1.6)^2 + (9 - 1.8)^2} = 7.59$$

2.3 Abstand eines Punktes P von einer Geraden g im $\mathbb{R}^3$

- Bestimme eine Ebene E, die senkrecht zu g ist und durch den Punkt P geht.
- Bestimme den Schnittpunkt S von g und E durch koordinatenweises Einsetzen von g in die Koordinatengleichung von E.
- Bestimme den Betrag des Vektors $\vec{SP}$.

Bsp.:

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad P: \ (5|-1|2)$$

$$E: \ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ 2x_1 - x_2 + x_3 - 13 = 0$$

$$2(1 + 2r) - (3 - r) + r - 13 = 0 \ \Leftrightarrow \ r = 2.33 \ \Rightarrow \ S = (5.67|0.67|2.33)$$

$$d = \sqrt{(5 - 5.67)^2 + ((-1) - 0.67)^2 + (2 - 2.33)^2} = 1.83$$

3 Komplexe Zahlen

3.1 Darstellung

Summenform	Polarform
$z = a + i \cdot b$	$z = r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$ $= r \cdot \text{cis } \alpha$

3.2 Rechenarten

$z_1 = a + b \cdot i$ $z_2 = c + d \cdot i$	$z_1 = r \cdot \text{cis } \alpha$ $z_2 = s \cdot \text{cis } \beta$

3.2.1 Addition

$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d) \cdot i$	

3.2.2 Subtraktion

$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d) \cdot i$	

3.2.3 Multiplikation

$z_1 \cdot z_2 = (a + b \cdot i) \cdot (c + c \cdot i)$ $= (a \cdot c - b \cdot d)$ $+(a \cdot d + b \cdot c) \cdot i$	$z_1 \cdot z_2 = r \cdot s \cdot \text{cis } (\alpha + \beta)$

3.2.4 Division

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + b \cdot i}{c + d \cdot i} = \frac{a + b \cdot i}{c + d \cdot i} \cdot \frac{c - d \cdot i}{c - d \cdot i}$ $= \frac{(a \cdot c + b \cdot d) + (b \cdot c - d \cdot a) \cdot i}{c^2 + d^2}$	$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r}{s}\right) \cdot \text{cis } (\alpha - \beta)$

3.3 Berechnung von Quadratwurzeln

$$z = \sqrt{r \cdot \text{cis } (\alpha)}$$

hat die beiden Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{r} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ z_2 &= \sqrt{r} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\alpha}{2} + 180^\circ\right) \end{aligned}$$