Michael Goerz

Übungen zur Theoretischen Physik IV, Quantentheorie SS 05, Blatt 9

Schakel, Glaum, Nogueira

Aufgabe 24: Schrödinger-Gleichung in einen Elektromagnetischen Feld: Eichinvarianz und Aharonov-Bohm Effekt.

Für ein geladenes Teilchen in einem elektromagnetischen Feld mit Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ lautet die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2m} [-i\hbar\nabla - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 + e\varphi(\mathbf{r}, t) \right\} \psi(\mathbf{r}, t). \tag{1}$$

1. Wie muß der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\mathbf{j}$ modifiziert werden, damit in diesem Fall die Kontinuitätsgleichung gilt?

2. Man schreibt $\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{r}, t)} e^{i\theta(\mathbf{r}, t)}$ mit $\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$. Zeigen Sie, daß die Wahrscheinlichkeitsstromdichte als $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)[\hbar\nabla\theta(\mathbf{r}, t) - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]/m$ geschrieben werden kann.

3. Zeigen Sie, daß die Schrödinger-Gleichung (1) invariant unter den Eichtransformationen $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + (\hbar/e)(\nabla\chi)$, $\varphi' = \varphi - (\hbar/e)(\partial\chi/\partial t)$, $\psi' = e^{i\chi}\psi$ ist.

4. Betrachten Sie ein rotationsfreies zeitunabhängiges magnetisches Feld $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0$. Zeigen Sie, daß die Wellenfunktion

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(\mathbf{r}, t) \exp\left[i\frac{e}{\hbar} \int_{C(\mathbf{r})} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}') \right] \tag{2}$$

eine Lösung der Schrödinger-Gleichung (1) ist, wobei $C(\mathbf{r})$ eine *beliebige* Kurve ist, die auf dem Punkt $\mathbf{r}$ endet. Die Funktion $\psi_0(\mathbf{r}, t)$ ist dabei eine Lösung der Schrödinger-Gleichung mit $\mathbf{A} = 0$ und beliebigem φ. Warum macht (2) keinen Sinn, wenn $\mathbf{B} \neq 0$ am Orte $\mathbf{r}$ ist.

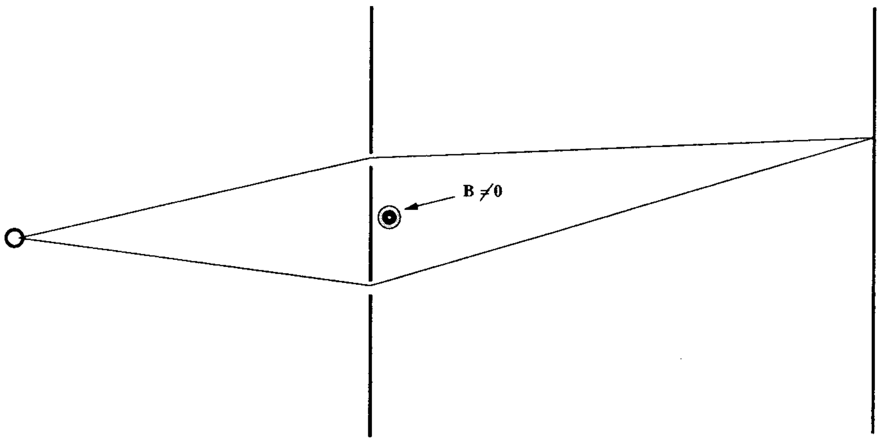
5. Betrachten Sie jetzt das Beugungsexperiment am Doppelspalt mit einem geladenen Teilchen. Man stelle sich einen sehr langen Flußschlauch senkrecht zur Streuebene in einem winzigen Gebiet hinter den Spalten vor (siehe Abbildung). D.h. $\mathbf{B} \neq 0$ ist *nur* in diesem kleinen Gebiet und Null außerhalb. Zeigen Sie, daß die Phasendifferenz für die Intensität $I \propto \cos^2 \frac{\Delta\theta}{2}$ die Form

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 + \frac{e}{\hbar} \underline{\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}}$$

Stokes → magn. Fluss

hat, wobei θ_1 und θ_2 die jeweiligen Phasen der ebenen Wellen ψ_0 von beiden Pfaden sind.

6. Wie sind die Interferenzmaxima im Vergleich zu dem üblichen Dopelspalt-Experiment verschoben?



8 Punkte

Aufgabe 25: Landau Niveaus. $\boxed{\phi = 0}$

Betrachten Sie ein geladenes Teilchen in einem konstanten magnetischen Feld $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$ ($B_0 > 0$).

1. Wählen Sie die Eichung $\mathbf{A} = -yB_0\mathbf{e}_x$ und schreiben Sie die Schrödinger-Gleichung für dieses System.

2. Zeigen Sie, daß die Energieeigenwerte

$$E_n(k_z) = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{3}$$

sind, wobei $n = 0, 1, 2, ...$ und $\omega_c = eB_0/m$ ist die sogenannte *Zyklotronfrequenz.*

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $\psi(x, y, z) = e^{i(k_x x + k_z z)} f(y)$, um die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung zu lösen.

3. Zeigen Sie, daß die Eigenfunktionen

$$\psi(x, y, z) = \frac{e^{i(k_x x + k_z z)}}{\pi^{1/4}\sqrt{l_B}\sqrt{2^n n!}} \exp\left[-\frac{(y - y_0)^2}{2l_B^2}\right] H_n\left(\frac{y - y_0}{l_B}\right)$$

sind, wobei $l_B = \sqrt{\hbar/(eB_0)}$ ist die sogennante magnetische länge und $y_0 = -\hbar k_x/(eB_0)$.

5 Punkte

Ausgabetermin: 8.6.2005, Abgabetermin: 20.6.2005, 11 Uhr

9. Übung

Aufgabe 24

1) $\dot{\rho} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$ Kontinuitätsgleichung

$\dot{\rho}$ ist zu berechnen : $\dot{\rho} = -\vec{\nabla}\cdot(?)$

2) gibt Ergebnis von 1 an

3) Invarianz prüfen :

$$[i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}]\,\psi(\vec{r},t) = [i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}' - \hbar(\vec{\nabla}\chi)]\,\psi'(\vec{r},t)\cdot e^{-i\chi}$$

$$= [i\hbar(\vec{\nabla}\psi') + i\hbar\cdot(-i)\,\cancel{(\vec{\nabla}\chi)}\,\psi' + e\vec{A}'\psi' - \hbar\,\cancel{(\vec{\nabla}\chi)}\,\psi']\,e^{-i\chi}$$

$$= e^{-i\chi}[i\hbar\vec{\nabla}\psi' + e\vec{A}'\psi']$$

$$[i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}]^2\psi = e^{-i\chi}[i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}']^2\psi'$$ zu zeigen

$\rightsquigarrow$ SG wird gleich bleiben

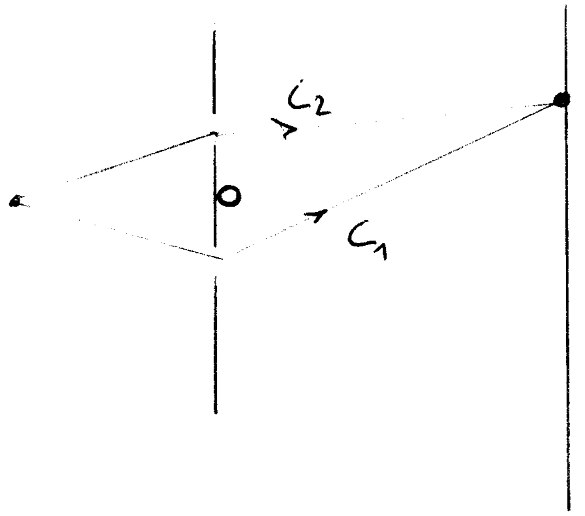
4) SG aufstellen, muss selbe SG für ψ_0 ergeben

$$\boxed{\vec{\nabla}\int_{C(\vec{r})} d\vec{r}'\cdot\vec{A}(\vec{r}') = \vec{A}(\vec{r})}$$

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} dx'\cdot A(x') = A(x)$$

$$\underset{*}{\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})} = \vec{B}$$

5)



Intensität ausrechnen <u>ohne</u> AB

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi_1(\vec{r}) + \Psi_2(\vec{r}) = |\Psi_0| \, e^{i\vartheta_1} + |\Psi_0| \cdot e^{i\vartheta_2}$$

$$|\Psi(\vec{r})|^2 = |\Psi_0|^2 - |\Psi_0|^2 \cdot e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)} + |\Psi_0|^2 \cdot e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)} + |\Psi_0|^2$$

$$= 2|\Psi_0|^2 \left(1 + \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)\right) = 4|\Psi_0|^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right)$$

<u>Aufgabe 25</u>

1) Gl. (1) nehmen, $\phi = 0$ setzen und A gemäß Aufgabe einsetzen

2) $\hat{H}\Psi = E\Psi$

$\downarrow$

$\hat{H} = \hat{H}(x) + \hat{H}(y) + \hat{H}(z)$

$\Rightarrow$ allg. Ansatz für Ψ: $\quad \Psi(\vec{r}) = \Psi_1(x) \cdot \Psi_2(y) \cdot \Psi_3(z)$

$\Psi_1(x) \sim e^{ik_x x}$

$\Psi_3(z) \sim e^{ik_z z}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2}f(y) = E\,f(y) - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}f(y) - \frac{1}{2m}\underbrace{\left[\hbar k_x + e y B_0\right]^2}_{}f(y)$$

$$\boxed{\tilde{y} := y + \frac{\hbar k_x}{e B_0}}$$

$$\rightsquigarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{d\tilde{y}^2}f(\tilde{y}) = \left(E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right)f(y) - \frac{1}{2m}e^2 B_0^2\,\tilde{y}^2\,f(\tilde{y})$$

$\rightarrow$ harmonischer Oszillator

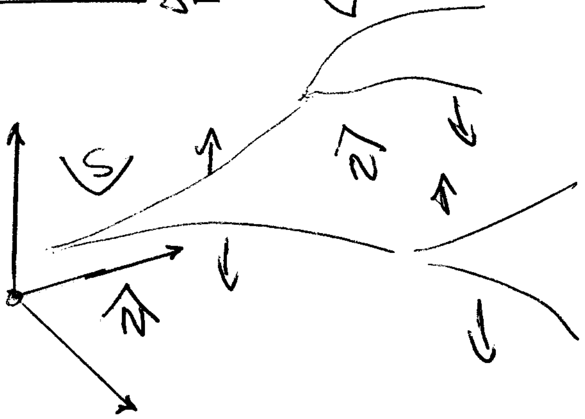
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{d\tilde{y}^2}f(\tilde{y}) + \frac{e^2 B_0^2}{2m}\tilde{y}^2 f(\tilde{y}) = \tilde{E}\,f(\tilde{y})$$

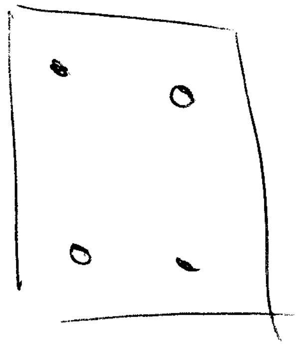
$$\tilde{E}_n = \hbar\omega\left(\frac{1}{2}+n\right) \quad \Longrightarrow \quad E_n = \tilde{E}_n + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

$$\omega = \frac{e B_0}{m}$$

$$f_n(\tilde{y}) = \left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{m\cdot\omega}{\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}}\,e^{-\frac{m\omega_c\tilde{y}^2}{2\hbar}}\,H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}\,\tilde{y}\right)$$

8. Übung





Aufgabe 21

1) 9 kombination sind zu prüfen, 3 davon sind notwendig

$[L_i, L_i] = 0$ 3 fälle weg

$[L_i, L_j] = -[L_j, L_i]$ fallen weg

interessant ist

$[J_1, J_2]$

$[J_2, J_3]$

$[J_3, J_1]$

$[L_j, L_i] = -i\hbar\, \varepsilon_{ijk} L_k$

$a_{1,2} |0\rangle = 0$

$K\, |j,m\rangle = j\, |j,m\rangle$

$a^{\dagger}_{1,2}\, a_{1,2}\, |l,m\rangle = n_{1,2}\, |l,m\rangle$

↑

Ganze Zahl!

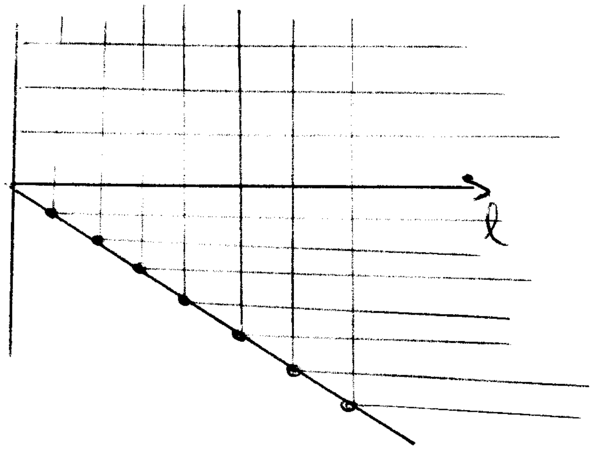
Aufgabe 22

1) $$J_m(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(m+l)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+m}$$

steht gängigerweise in den Büchern

Aber: $m \geq 0$ $\Rightarrow$ Formel wie in der Übung

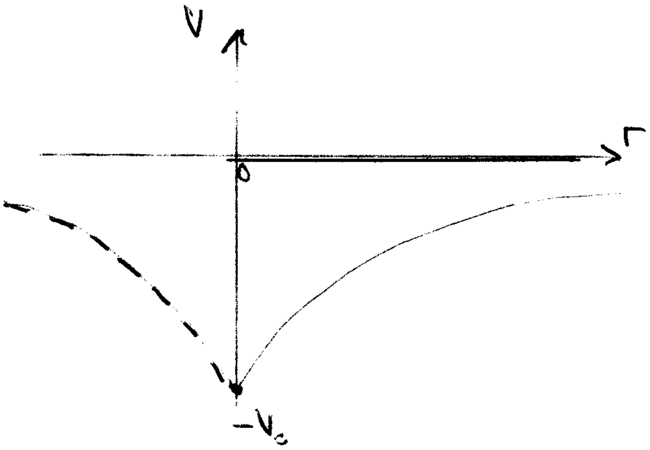
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} f_n \cdot h_l \cdot w_{n-l} \overset{n-l\equiv m}{\equiv} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{\infty} f_{m+l} \cdot h_l \cdot w_m$$



$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=\max(0,-m)}^{\infty} f_{m+l} \cdot h_l \cdot w_m$$

2), 3) trivial :-)

Aufgabe 23



2) siehe 22.3,4

$\alpha - 1$

$1 - \alpha$?

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty dx\, x^{\alpha-1} e^{-x} \rightsquigarrow \Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$$

Verallgemeinerung der Fakultät

$\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$ für ganze Zahlen

$$\Gamma(\alpha) \xrightarrow{\alpha \to -n} -\infty$$

Michael Goerz

Übungen zur Theoretischen Physik IV, Quantentheorie SS 05, Blatt 7

Schakel, Glaum, Nogueira

Aufgabe 18: Vollständigkeitsrelation für die Kugelflächenfunktionen.

Zeigen Sie, daß die Kugelflächenfunktionen die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\vartheta,\varphi)Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi') = (\sin\vartheta)^{-1}\delta(\vartheta-\vartheta')\delta(\varphi-\varphi')$$

erfüllen.
Hinweis: Benutzen Sie, daß eine Funktion auf der Kugeloberfläche in der Basis der Kugelflächenfunktion zerlegt werden kann, d.h.

$$f(\vartheta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}Y_{lm}(\vartheta,\varphi),$$

a_{lm} ist zu bestimmen

und es gilt die Orthonormalitätsrelation

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \; Y_{lm}(\vartheta,\varphi)Y^*_{l'm'}(\vartheta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

3 Punkte

Aufgabe 19: Drehimpuls und Kommutatoren.

Gegeben sei der Drehimpulsoperator $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ mit der Eigenschaft $[L_i, L_j] = i\hbar\sum_k \epsilon_{ijk}L_k$. Zeigen Sie, daß:

1. für Vektoroperatoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ die Relation $[\mathbf{A}\cdot\mathbf{L}, \mathbf{B}\cdot\mathbf{L}] = i\hbar(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{L}$ gilt unter der Voraussetzung, daß $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ untereinander und mit $\mathbf{L}$ kommutieren;
2. $[L_i, p_j] = i\hbar\sum_k \epsilon_{ijk}p_k$ und $[L_i, x_j] = i\hbar\sum_k \epsilon_{ijk}x_k$;
3. $[\mathbf{L}^2, \mathbf{x}] = 2i\hbar(\mathbf{x}\times\mathbf{L} - i\hbar\mathbf{x})$ und $[\mathbf{L}^2, \mathbf{p}] = 2i\hbar(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - i\hbar\mathbf{p})$;
4. für jede skalare Funktion $f(\mathbf{x},\mathbf{p}) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\mathbf{x}^2 + b_n\mathbf{p}^2 + c_n\mathbf{x}\cdot\mathbf{p} + d_n\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})^n$ mit a_n, b_n, c_n, $d_n \in \mathbb{C}$ gilt $[\mathbf{L}^2, f(\mathbf{x},\mathbf{p})] = 0$;
5. für einen Vektoroperator $\mathbf{V}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ gilt: $[\mathbf{L}^2, \mathbf{V}] = 2i\hbar(\mathbf{V}\times\mathbf{L} - i\hbar\mathbf{V})$.

5 Punkte

Aufgabe 20: Drehimpulserwartungswerte in einen bestimmten Zustand.

Betrachten Sie ein System mit dem Drehimpuls $l = 1$, dessen Zustandsraum durch die Basis $|+1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle$ der drei gemeinsamen Eigenvektoren von $\mathbf{L}^2$ (Eigenwert $2\hbar^2$) und L_z (Eigenwerte $+\hbar$, 0 bzw. $-\hbar$) aufgespannt wird. Das System befinde sich im Zustand

$$|\psi\rangle = \alpha|+1\rangle + \beta|0\rangle + \gamma|-1\rangle,$$

wobei α, β, γ drei gegebene komplexwertige Parameter sind.

1. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \mathbf{L} \rangle$ des Drehimpulses in Abhängigkeit von α, β und γ.

2. Geben Sie den Ausdruck für die drei Erwartungswerte $\langle L_x^2 \rangle$, $\langle L_y^2 \rangle$ und $\langle L_z^2 \rangle$ in Abhängigkeit von diesen Größen an.

4 Punkte

Ausgabetermin: 23.5.2005, Abgabetermin: 6.6.2005, 11 Uhr

Aufgabe 19

$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} \neq -\vec{p} \times \vec{x}$ in der QM

$$(\vec{L})_i = (\vec{x} \times \vec{p})_i = \sum_{j,l} \varepsilon_{jli} x_j p_l$$

beachte: $\varepsilon_{jli} = \varepsilon_{ilj} = \varepsilon_{lij} \dots$ Vertauschungen

$= -\varepsilon_{lji} \dots$

$$\boxed{\sum_i \varepsilon_{jli} \varepsilon_{kmi} = \delta_{jk}\delta_{lm} - \delta_{jm}\delta_{lk}}$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

$$[x_i, x_j] = 0 = [p_i, p_j]$$

zu 3)

Beh: $[\vec{L}^2, \vec{x}\vec{p}] = 0$

Bew:

$$\sum_{i,j} [L_i^2, x_j p_j] = \sum (L_i [L_i, x_j p_j] + [L_i, x_j p_j] L_i)$$

$$= \sum_{i,j} (L_i [L_i, x_j] p_j + L_i x_j [L_i, p_j] + x_j [L_i, p_j] L_i + [L_i, x_j] p_j L_i)$$

$$= \sum_{i,j} \left(i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} \, x_k p_j + i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} \, .. \right.$$

Aufgabe 20

$$L_x = \frac{1}{2}(L_x + L_-)$$

$$L_z |l m\rangle = m\hbar |l m\rangle$$

$$L_y = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)$$

$l = 1$, $m = 1, 0, -1$

$|+1\rangle = |1, +1\rangle$

$$L_+ |l, m\rangle = \text{const.} \; |l, m+1\rangle$$

$$= \hbar \sqrt{(l+m)(l-m+1)} \; |l, m+1\rangle$$

$$L_- |l, m\rangle = \hbar \sqrt{(l+m+1)(l+m)} \; |l, m-1\rangle$$

nachschlagen

Übungen zur Theoretischen Physik IV, Quantentheorie SS 05, Blatt 6

Schakel, Glaum, Nogueira

Aufgabe 16: Potentialstufe.

Betrachten Sie eine Potentialstufe $V(x) = V_0 > 0$, wenn $x \in [0, a]$, $V(x) = 0$ sonst. Bestimmen Sie den Durchlässigkeits- und Reflektionskoeffizienten für Energien $0 < E < V_0$ durch Lösung der zeitunahängigen Schrödinger-Gleichung.

6 Punkte

Aufgabe 17: Kontinuitätsgleichung.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{i\hbar}{2m}[\psi^*(\mathbf{r}, t)\nabla\psi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}, t)\nabla\psi^*(\mathbf{r}, t)],$$

erfüllen die Kontinuitätsgleichung

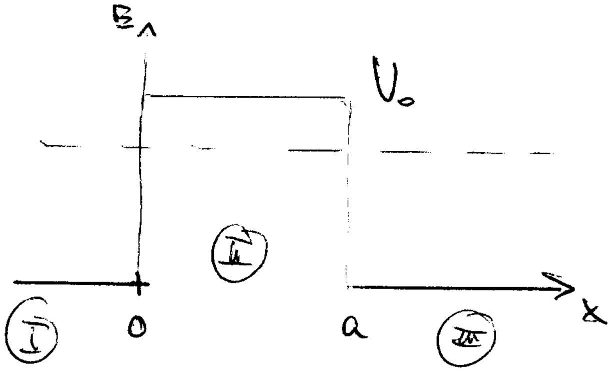
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

1. Beweisen Sie dies unter Verwendung der Schrödinger-Gleichung.
2. Sei $\psi(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|e^{i\theta(\mathbf{r},t)}$. Drücken Sie $\mathbf{j}$ durch Betrag und Phase von ψ aus. Zeigen Sie, daß für eine ebene Welle $\psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ die Wahrscheinlichkeitsstromdichte ist $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}_G(\mathbf{r}, t)$, wobei $\mathbf{v}_G(\mathbf{r}, t) = \hbar\mathbf{k}/m$ ist die Gruppengeschwindigkeit und $\rho(\mathbf{r}, t) = |A|^2$.
3. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte für alle drei Teilgebiete aus Aufgabe 16. Diskutieren Sie den Grenzfall $V_0 \to \infty$, $a \to 0$ mit $V_0 a = \text{const}$.

5 Punkte

Ausgabetermin: 18.5.2005, Abgabetermin: 30.5.2005, 11 Uhr

Aufgabe 16



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi + V(x)\Psi = E\Psi$$

→ Exponentialansatz

$$\Psi = c \cdot e^{\lambda x}$$

- $\Psi_1(x) = A \cdot e^{-ikx} + B \cdot e^{ikx}$
- $\Psi_3(x) = C \cdot e^{-ikx} + D \cdot e^{ikx}$

$$\boxed{k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}}$$

$\Psi_2(x) = ?$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi = (E - V_0)\Psi$$

$$\Psi = c \cdot e^{\lambda x}$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{-2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$$

$$\boxed{\varkappa \equiv \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}}$$

- $\Psi_2(x) = F \cdot e^{-\varkappa x} + G e^{\varkappa x}$

Anschlussbed. (4 Stück): Alle Stetig

Normierung trägt nicht zur Lsg. bei

willkürlich $B = 1$ ↝ $A =$ "Reflexionswert"

$C = 0$ (physikalische Interpretation)

Reflektionskoeffizient $R = \frac{|A|^2}{|1|^2} = |A|^2$

Transmissionskoeffizient $T = |D|^2$

$$\boxed{R + T = 1}$$

Aufgabe 17

Wenn nötig, in einer Dimension lösen

Zu 2)

$\vec{\nabla}(\vec{k}\vec{r}) \neq \vec{k} \cdot \vec{\nabla}\vec{r}$! Mathematica !

Zu 3)

$j(\vec{r}, t) = f\,(A \text{ oder } D)$

Stromdichte I und II gleich groß ???

Stromdichte in II ?

$V_0 \to \infty \quad , a \to 0$

$V_0 \cdot a = \text{const} = \lambda$

Benutzen:

$\kappa a = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left(\sqrt{(V_0 - E)\,a^2}\right) \to 0$

$$\boxed{\sinh \kappa a \approx \kappa a}$$

Michael Goerz

Übungen zur Theoretischen Physik IV, Quantentheorie SS 05, Blatt 5

Schakel, Glaum, Nogueira

Aufgabe 13: Baker-Campbell-Hausdorff Formel.

A, B seien Operatoren, die beide mit $[A, B]$ kommutieren. $A[A,B] = [A,B]A$

$B[A,B] = [A,B]B$

1. Man zeige zunächst ($n = 1, 2, 3, ...$)

$$[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B], \qquad [A^n, B] = nA^{n-1}[A, B].$$

2. Man betrachte die Schar von Operatoren $f(\lambda) = e^{\lambda A}e^{\lambda B}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und zeige

$$\frac{df}{d\lambda} = (A + B + \lambda[A, B])f(\lambda).$$

Man schließe daraus, daß

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}.$$

e-Funktion ist als Reihe definiert

4 Punkte

Aufgabe 14: Vorbereitung zur kohärenten Zuständen.

Seien a und $a^\dagger$ Operatoren mit $[a, a^\dagger] = 1$ und $a|0\rangle = 0$.

1. Berechnen Sie den Kommutator $[a, (a^\dagger)^n]$.
2. Seien $|n\rangle = c_n(a^\dagger)^n|0\rangle$. Bestimmen Sie die Koeffizienten c_n, so daß $|n\rangle$ auf Eins normiert sind.
3. Zeigen Sie, daß $|z\rangle \equiv e^{za^\dagger}|0\rangle$ ein Eigenzustand von a ist ($z \in \mathbb{C}$), und bestimmen Sie den Eigenwert.
4. Berechnen Sie $\langle z_1|z_2\rangle$.

4 Punkte

Aufgabe 15: Kohärente Zustände des Oszillators.

Betrachten Sie die kohärenten Zustände $|z\rangle = e^{-|z|^2/2}e^{za^\dagger}|0\rangle$ ($z \in \mathbb{C}$) eines eindimensionalen harmonischen Oszillators zur Zeit $t = 0$. Für diesen gilt

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a), \qquad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^\dagger - a),$$

und

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right).$$

1. Zeigen Sie, daß die Erwartungswerte $\langle z(t)|\hat{x}|z(t)\rangle$ und $\langle z(t)|\hat{p}|z(t)\rangle$ eine Schwingungsbewegung durchfüren, und bestimmen Sie die Amplituden. Ist das Zeitverhalten der Erwartungswerte von x und p mit den klassischen Bewegungsgleichungen verträglich? Unter welcher Bedingung ist der Erwartungswert der Energie mit der klassischen Energie identisch?

2. Berechnen Sie die Unschärfe von $\hat{x}$, $\hat{p}$, und $\hat{H}$ in den Zuständen $|z(t)\rangle$.

4 Punkte

Ausgabetermin: 9.5.2005, Abgabetermin: 23.5.2005, 11 Uhr

Aufgabe 13

Operatoren:

$$\hat{a}\hat{b} \neq \hat{b}\hat{a} \quad ; \quad \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a} \equiv [a, b]$$

$$ab = ba + [a, b]$$

$$[A, BC] = ABC - BCA = ABC - BAC + BAC - BAC$$

$$= [A, B]C + B[A, C]$$

$\Rightarrow$ Aufg. 13.1

<u>Beh.:</u> $$\frac{d}{d\lambda} \ln \hat{C}(\lambda) = \hat{C}^{-1}(\lambda) \cdot \frac{d\hat{C}(\lambda)}{d\lambda}$$

<u>Bew.:</u> $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

$$(1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\ln(\hat{C}) = \ln(I + [\hat{C} - I]) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} [\hat{C} - I]^n$$

$$\hat{C}^{-1} = (I + [\hat{C} - I])^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [\hat{C} - I]^n$$

$$\frac{d}{d\lambda} \ln \hat{C} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{d}{d\lambda} [\hat{C}(\lambda) - I]^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} n [\hat{C}(\lambda) - I]^{n-1} \cdot \frac{d\hat{C}}{d\lambda}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} [\hat{C} - I]^{n-1} \right) \cdot \frac{d\hat{C}}{d\lambda}$$

$$\underset{n-1 = n'}{\equiv} \left(\sum_{n'=0}^{\infty} (-1)^{n'} [\hat{C} - I]^{n'} \right) \cdot \frac{d\hat{C}}{d\lambda}$$

$$= \hat{C}^{-1}(\lambda) \cdot \frac{d\hat{C}(\lambda)}{d\lambda} \quad \blacksquare$$

Aufgabe 14

$a|0\rangle$ „Vernichtungsoperator angewendet auf
$= 0$ Grundzustand"

$$\langle 0|a^\dagger = (a|0\rangle)^\dagger = |0\rangle^\dagger \cdot a^\dagger = \langle 0|$$

$$\langle n|n\rangle \overset{!}{=} 1$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}}$$ Ergebnis

$$\langle 0|0\rangle = 1$$

$$\langle n| = \langle 0| \cdot \left((a^\dagger)^n\right)^\dagger \cdot c_n^*$$

$$\left((a^\dagger)^n\right)^\dagger = \left((a^\dagger)^{n-1} \cdot a^\dagger\right)^\dagger = a \cdot \left((a^\dagger)^{n-1}\right)^\dagger = a \cdot a \cdot \left((a^\dagger)^{n-2}\right)^\dagger$$

$$= \ldots = a^{n-1} \cdot (a^\dagger)^\dagger = a^n$$

$\langle 0|a^2|0\rangle = 0$ (uninteressant)

$$\langle 0|a \cdot a|2\rangle$$

$$a|n\rangle = \begin{cases} \sqrt{n} \cdot |n-1\rangle & \text{für } n \neq 0 \\ 0 & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

$$[a, (a^\dagger)^n] \overset{n=0}{=} a \cdot I - I a = a - a = 0$$

Aufgabe 15

geschickt machen !!!

Vorbemerkung

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (a^+)^n |0\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$|z(t)\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} |n\rangle$$

$$\boxed{a|z(t)\rangle = z \cdot e^{-i\omega t} |z(t)\rangle}$$ Zu zeigen

$$\langle z(t)| a^+ = z^* e^{i\omega t} \langle z(t)|$$

$$\boxed{\langle z(t) | z(t)\rangle = 1}$$

Benutzen um die Mittelwerte zu berechnen

$$\langle z(t)| \hat{x} | z(t)\rangle = \langle \hat{x}(t)\rangle \quad \text{(Schreibweise)}$$

Amplituden:

z in Polardarstellung: $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$
$z^* = |z| \cdot e^{-i\varphi}$

kohärent heißt, das Wellenpaket zerfließt nicht

Übungen zur Theoretischen Physik IV, Quantentheorie SS 05, Blatt 4

Schakel, Glaum, Nogueira

Aufgabe 11: Energiebänder. * $\longrightarrow$ „Bloch-Theorem“

Gegeben sei ein periodisches Potential

$$V(x) = \lambda \sum_{n=1}^{N} \delta(x - na), \qquad (\lambda < 0).$$

Gesucht werden Lösungen $\psi(x)$ der Schrödinger Gleichung mit periodischen Randbedingungen $\psi(x + Na) = \psi(x)$.

1. Zeigen Sie, daß es für $ma\lambda/\hbar^2 < -2$ genau N gebundene Zustände gibt.
2. Stellen Sie für $N = 11$ und $m\lambda/\hbar^2 = -1$ die zugehörigen Energieeigenwerte als Funktion von a im Vergleich zu dem Energieeigenwert eines isolierten δ-Potentials graphisch dar.

6 Punkte

Aufgabe 12: Kohärenten Zustände. kein Mathematica

Man schreibt die allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung für den harmonischen Oszillator als eine lineare Kombination von stationären Zuständen $\phi_n(x)$:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar},$$

mit bestimmten Koeffizienten a_n, $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ und

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{\beta}{2^n n! \sqrt{\pi}}}\; e^{-\beta^2 x^2/2} H_n(\beta x),$$

wobei $\beta \equiv \sqrt{m\omega/\hbar}$. $H_n(y)$ stellen dabei Hermite-Polynome dar.

1. Beweisen Sie die Orthonormalität

$$\int dx\; \phi_n(x) \phi_m(x) = \delta_{nm}.$$

2. Nun betrachtet man ein Gauss-Packet, der zum Zeitpunkt $t = 0$ um x_0 zentriert ist:

$$\psi(x, 0) = \sqrt{\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}} \exp\left[-\frac{\beta^2}{2}(x - x_0)^2\right].$$

Benutzen Sie die Orthonormalität von $\phi_n(x)$, um die a_n's zu bestimmen. Zeigen Sie, daß

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \exp[-\beta^2(x - x_0 \cos\omega t)^2].$$

Skizzieren Sie die Zeitentwicklung von $|\psi(x,t)|^2$.

Hinweis: Benutzen Sie die erzeugende Funktion der Hermite-Polynome

$$e^{-\xi^2+2\xi y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} H_n(y).$$ (ständig benutzen!)

6 Punkte

Ausgabetermin: 2.5.2005, Abgabetermin: 16.5.2005, 11 Uhr

Übungen zur Theoretischen Physik IV, Quantentheorie SS 05, Blatt 4
Lösung zur Aufgabe 11

Das Potential hat die Form

$$V(x) = \lambda \sum_{n=1}^{N} \delta(x - na). \tag{1}$$

Betrachten wir nun ein Gebiet $x \in ([n-1]a, na)$ mit $n = 1, 2, \ldots$. In diesem gilt $V(x) = 0$ und aus der Schrödinger-Gleichung folgt mit dem Ansatz $\psi(x) = e^{\eta x}$ eine folgende charakteristische Gleichung:

$$-\frac{\hbar^2 \xi^2}{2m} = E. \tag{2}$$

Diese hat zwei Lösungen

$$\xi_{1,2} = \pm\kappa \quad , \quad \text{wobei} \quad \kappa \equiv \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}. \tag{3}$$

Wohlgemerkt ist κ für gebundene Zustände ($E < 0$) reell. Die Wellenfunktion im Gebiet $x \in ([n-1]a, na)$ hat dann die folgende allgemeine Form:

$$\psi_n(x) = b_n e^{\kappa x} + c_n e^{-\kappa x}. \tag{4}$$

Da diese Wellenfunktion aus allgemeinen Gründen überall stetig ist, muss sie auch an der Grenze zwischen zwei solchen Gebieten stetig sein, d.h.

$$\psi_{n+1}(na) = \psi_n(na) \quad \text{oder} \quad b_{n+1}e^{\kappa na} + c_{n+1}e^{-\kappa na} = b_n e^{\kappa na} + c_n e^{-\kappa na}. \tag{5}$$

Die erste Ableitung ist zwar an der Grenze zwischen zwei Gebieten unstetig, macht aber nur einen endlichen Sprung, und die Sprungbedingung lautet

$$\psi'_{n+1}(na) - \psi'_n(na) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\psi_n(na) \quad \text{oder}$$
$$\kappa\Big(b_{n+1}e^{\kappa na} - c_{n+1}e^{-\kappa na} - b_n e^{\kappa na} + c_n e^{-\kappa na}\Big) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\Big(b_n e^{\kappa na} + c_n e^{-\kappa na}\Big). \tag{6}$$

Aus den Gleichungen (5) und (6) können wir das folgende rekursive Gleichungssystem herleiten:

$$\begin{aligned} b_{n+1}e^{\kappa(n+1)a} &= e^{\kappa a}\left[\left(1 + \frac{m\lambda}{\kappa\hbar^2}\right)b_n e^{\kappa na} + \frac{m\lambda}{\kappa\hbar^2}c_n e^{-\kappa na}\right] \\ c_{n+1}e^{-\kappa(n+1)a} &= e^{-\kappa a}\left[-\frac{m\lambda}{\kappa\hbar^2}b_n e^{\kappa na} + \left(1 - \frac{m\lambda}{\kappa\hbar^2}\right)c_n e^{-\kappa na}\right] \end{aligned} \tag{7}$$

Dieses lineare Gleichungssystem lässt sich auch bequem in Matrixschreibweise darstellen:

$$\begin{pmatrix} b_{n+1}e^{\kappa(n+1)a} \\ c_{n+1}e^{-\kappa(n+1)a} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} b_n e^{\kappa na} \\ c_n e^{-\kappa na} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

wobei M die Matrix

$$M \equiv \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{m\lambda}{\kappa\hbar^2}\right)e^{\kappa a} & \frac{m\lambda}{\kappa\hbar^2}e^{\kappa a} \\ -\frac{m\lambda}{\kappa\hbar^2}e^{-\kappa a} & \left(1 - \frac{m\lambda}{\kappa\hbar^2}\right)e^{-\kappa a} \end{pmatrix} \tag{9}$$

darstellen soll.

Betrachten wir nun das Gebiet $x \in (Na, [N+1]a)$. Für diesen gilt $n = N$ und

$$\begin{pmatrix} b_{N+1}e^{\kappa(N+1)a} \\ c_{N+1}e^{-\kappa(N+1)a} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} b_N e^{\kappa Na} \\ c_N e^{-\kappa Na} \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} b_{N-1}e^{\kappa(N-1)a} \\ c_{N-1}e^{-\kappa(N-1)a} \end{pmatrix} = ... \tag{10}$$

Den Prozess der Rekursion kann man immer tiefer verfolgen, bis man schliesslich findet, daß es gilt

$$\begin{pmatrix} b_{N+1}e^{\kappa(N+1)a} \\ c_{N+1}e^{-\kappa(N+1)a} \end{pmatrix} = M^N \begin{pmatrix} b_1 e^{\kappa a} \\ c_1 e^{-\kappa a} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Andererseits wissen wir aber, daß unsere Wellenfunktion periodisch ist mit der Bedingung $\psi(x + Na) = \psi(x)$. Das lässt sich für $x = a$ in unserer Sprache mit gestückelten Wellenfunktionen auch schreiben als $\psi_{N+1}([N+1]a) = \psi_1(a)$, also

$$\begin{pmatrix} b_{N+1}e^{\kappa(N+1)a} \\ c_{N+1}e^{-\kappa(N+1)a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 e^{\kappa a} \\ c_1 e^{-\kappa a} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Der Vergleich zwischen (11) und (12) ergibt eine wichtige Beziehung

$$M^N = I_2 \quad , \tag{13}$$

wobei I_2 die (2×2) -Einheitsmatrix representieren soll. Um diese Gleichung auswerten zu können, müssen wir allerdings unsere Matrix (9) potenziieren. Das geht mit Hilfe des Diagonalisierungstricks:

$$M = T \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix} T^{-1}. \tag{14}$$

Dabei sollte T die Transformationsmatrix darstellen und $\eta_{1,2}$ die beiden Eigenwerte der Matrix M. Letztere lassen sich ausrechnen mit dem Ergebnis

$$\eta_{1,2} = \cosh \kappa a + \frac{m\lambda}{\kappa\hbar^2} \sinh \kappa a \pm i\sqrt{1 - \left[\cosh \kappa a + \frac{m\lambda}{\kappa\hbar^2} \sinh \kappa a\right]^2} \tag{15}$$

Die Transformationsmatrix lässt sich nicht so leicht herleiten, aber glücklicherweise wird sie auch nicht benötigt. Dies sieht man wie folgt:

$$M^N = T \begin{pmatrix} \eta_1^N & 0 \\ 0 & \eta_2^N \end{pmatrix} T^{-1} = I_2. \tag{16}$$

Multipliziert man nun beide Seiten mit T^{-1} von links und mit T von rechts, so erhällt man

$$\begin{pmatrix} \eta_1^N & 0 \\ 0 & \eta_2^N \end{pmatrix} = T^{-1} I_2 \, T = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Wie man hier direkt sieht, spielt die Transformationsmatrix hier keine Rolle mehr. Die Lösungen des Problems lassen sich deshalb explizit angeben als

$$\eta_{1,2} = \exp\left\{2\pi i \, n_{1,2}/N\right\} \tag{18}$$

mit $n_{1,2} = 1, 2, ..., N$. Durch den Vergleich mit dem Ergebnis (15) sehen wir unmittelbar, daß η_1 und η_2 zueinander konjungiert sind, sprich $n_2 = N - n_1$, und daß deren Realteile folgende Gleichung erfüllen

$$\cos(2\pi n/N) = \cosh \kappa a + \frac{m\lambda}{\kappa\hbar^2} \sinh \kappa a. \tag{19}$$

Die linke Seite kann nur Werte zwischen +1 und -1 annehmen, während die Funktion auf der rechten Seite nur positive Werte mit Sicherheit annehmen kann. Die negativen werden dagegen nur bei bestimmter Parameterwahl getroffen. Je nach Wahl der Lösung kann auf der linken Seite obiger Gleichung der Wert -1 (z.B. bei $n = N/2$ für gerade N) angenommen werden. Damit gesichert ist, daß dies tatsächlich auch eine Lösung ist, muss die rechte Seite von (19) diesen Wert -1 auch erreichen oder gar unterschreiten. D.h. nun

$$\cosh \kappa a + \frac{m\lambda}{\kappa\hbar^2} \sinh \kappa a \leq -1 \tag{20}$$

muss erfüllt sein. Das liefert wiederum die gesuchte Einschränkung für die Wechselwirkungsstärke λ:

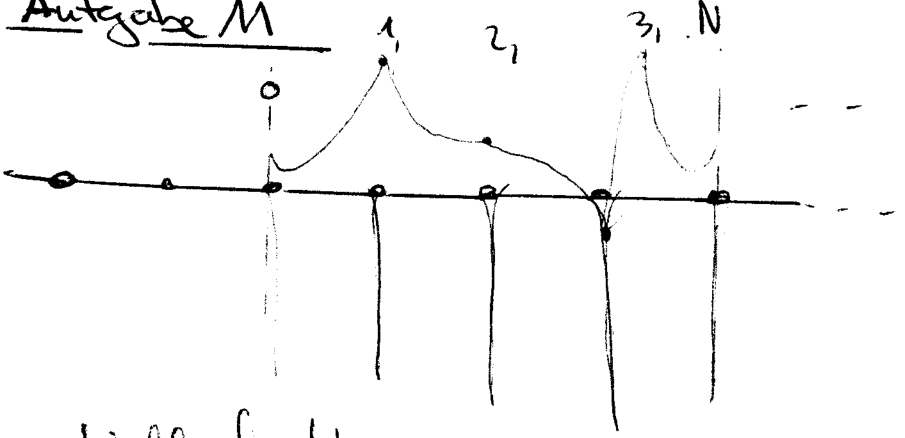
$$\frac{m\lambda a}{\hbar^2} \leq -\kappa a \frac{1 + \cosh \kappa a}{\sinh \kappa a} \leq -2. \tag{21}$$

Die letzte Ungleichung gilt tatsächlich für alle κ- und a-Werte, was man z.B. mit *Mathematica* leicht sehen kann. Damit ist Aufgabe 11.1 vollständig geklärt.

Nun zum Aufgabeteil 11.2.

Blatt 4

Aufgabe M



freier Zustand = pos Energie $\rightarrow$ im. Expon.

geb. Zustand = neg. Energie $\rightarrow$ reeller Exp.

Wellenfunktion ansetzen

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Psi_1(x) = c_1^{<} e^{\varkappa x} + c_1^{>} e^{-\varkappa x} & \text{für } x \in [0,a] \\ \Psi_2(x) = c_2^{<} e^{\varkappa x} + c_2^{>} e^{-\varkappa x} & \text{für } x \in [a,2a] \\ \dots & \text{für } x \in [(N-1)a, Na] \end{cases}$$

$$c_{n+1}^{<} = A(n) \cdot c_n^{<} + B(n) \cdot c_n^{>}$$

$$c_{n+1}^{>} = C(n) \cdot c_n^{<} + D(n) \cdot c_n^{>}$$

ungef. Lsg.

$A(n)$, $B(n)$, ... sind zu bestimmen

Lsg in anderer Form (besser)

$$c_{n+1}^{>} e^{-(n+1)\varkappa a} = \tilde{A} \cdot c_n^{<} e^{n\varkappa a} + \tilde{B} \cdot c_n^{>} \cdot e^{-n\varkappa a}$$

$$c_{n+1}^{<} e^{(n+1)\varkappa a} = \tilde{C} \cdot c_n^{<} e^{n\varkappa a} + \tilde{D} \cdot c_n^{>} \cdot e^{-n\varkappa a}$$

$\Rightarrow$ Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} c_{n+1}^{>} e^{-(n+1)\varkappa a} \\ c_{n+1}^{<} e^{(n+1)\varkappa a} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} c_n^{>} e^{-n\varkappa a} \\ c_n^{<} e^{n\varkappa a} \end{pmatrix} ; \quad M = \begin{pmatrix} \tilde{B} & \tilde{A} \\ \tilde{D} & \tilde{C} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{N+1}^{>} e^{-(N+1)\varkappa a} \\ c_{N+1}^{<} e^{(N+1)\varkappa a} \end{pmatrix} + M^N \begin{pmatrix} c_1^{>} e^{+\varkappa a} \\ c_1^{<} e^{\varkappa a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^{>} \cdot e^{-\varkappa a} \\ c_1^{<} e^{\varkappa a} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M^N = I}$$

M ist kompliziert, daher M diagonalisieren

$$M = T \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix} \cdot T^{-1}$$

$\eta_1, \eta_2, \ldots$ sind Eigenwerte von M

$$M^2 = T \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix} \underbrace{T^{-1} \cdot T}_{I} \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$= T \cdot \begin{pmatrix} \eta_1^2 & 0 \\ 0 & \eta_2^2 \end{pmatrix} \cdot T^{-1}$$

allg. $M^N = T \begin{pmatrix} \eta_1^N & 0 \\ 0 & \eta_2^N \end{pmatrix} T^{-1}$

$$= I_2 \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \eta_1^N & 0 \\ 0 & \eta_2^N \end{pmatrix} = T^{-1} I_2 T = I_2}$$

$$\eta_{1,2}^N - 1 = 0$$

Teilaufg. 2 mit Mathematica

~~Teil~~

Aufgabe 12

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; \Psi(x,0) \cdot \phi_n(x)$$ ist auszuführen

Michael Goerz

Übungen zur Theoretischen Physik IV, Quantentheorie SS 05, Blatt 3

Kleinert, Glaum, Nogueira

Aufgabe 8:

Zeigen Sie, daß die Operator-Beziehung

$$e^{ipa/\hbar}x\, e^{-ipa/\hbar} = x + a$$

gilt. Der Operator e^A ist definiert als

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Hinweis: Berechnen Sie $e^{ipa/\hbar}xe^{-ipa/\hbar}f(p)$, wobei $f(p)$ eine beliebige Funktion von p sei, und benützen Sie $x = i\hbar\partial/\partial p$.

3 Punkte

Aufgabe 9:

Bestimmen Sie die Energie des gebundenen Zustandes für das Potential

$$V(x) = -\lambda\delta(x), \qquad (\lambda > 0).$$

3 Punkte

Aufgabe 10:

Ein Teilchen der Masse m bewegte sich im Potential

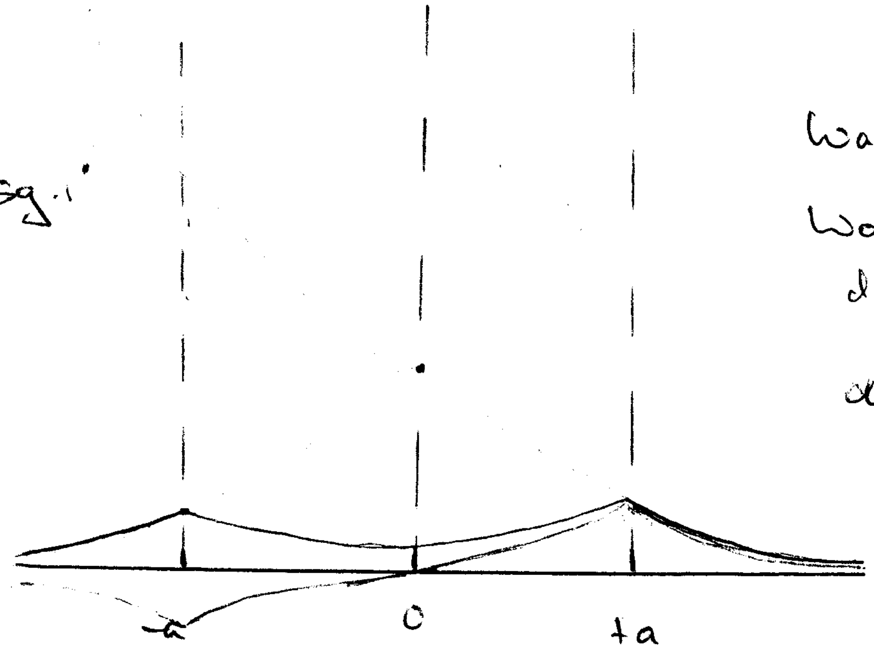
$$V(x) = -\lambda[\delta(x-a) + \delta(x+a)], \qquad (\lambda > 0).$$

Geben Sie die (transzendenten) Gleichungen für die beiden Bindungszustände des Systems an und schätzen Sie die Differenz der beiden Energieniveaus für großes a ab.

3 Punkte

Ausgabetermin: 25.4.2005, Abgabetermin: 9.5.2005, 8 Uhr

Symm. Lsg.:



Warum Ansätze?
Warum Unstetigkeit d. Ableitung?
aus δ-Funktion

Ansatz: $\psi_l(x) = nAe^{\varkappa x}$ $\qquad \psi_m(x) = n\left(e^{-\varkappa x} + e^{\varkappa x}\right)$ $\qquad \psi_r(x) = nAe^{-\varkappa x}$

Stetigkeitsbed.: $e^{-a\varkappa}\left(1 - A + e^{2a\varkappa}\right) \overset{!}{=} 0 \to A = 1 + e^{2a\varkappa}$

Unstetigkeit d. Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_m\Big|_a - \frac{\partial}{\partial x}\psi_r\Big|_a = g\cdot\psi_r(a) \qquad (\ ?\ )$$

$$\rightsquigarrow e^{a\varkappa}\left(-g + 2\varkappa\right) = e^{-a\varkappa} g$$

---

antisymm. Lsg:

$\psi_l(x) = -nAe^{\varkappa x}$ $\qquad \psi_m(x) = n\left(e^{\varkappa x} - e^{-\varkappa x}\right)$ $\qquad \psi_r(x) = nA\cdot e^{-\varkappa x}$

Stetigkeitsbed. / Unstetigkeit d. Ableitung

$A \to -1 + e^{2a\varkappa}$

$e^{a\varkappa}\varkappa = g\sinh(a\varkappa)$

$$E\,\psi(x) = \frac{-\hbar^2}{2m}\psi''(x) + \lambda\,\delta(x)\,\psi(x)$$

$$E\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\psi(x)\,dx = \frac{-\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\psi''(x) + \lambda\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(x)\,\psi(x) \quad \Big|\ \varepsilon\to 0$$

$$0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi'(0^+) - \psi'(0^-)\right) + \cancel{\int_{-\varepsilon}}\ \lambda\,\psi(0)$$

$$\Rightarrow \psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \frac{2m}{\hbar^2}\cdot\lambda\cdot\psi(0) \qquad (1)$$

ψ soll stetig sein

$\psi^<(x) = N\cdot e^{\kappa x}$

$\psi^>(x) = N\cdot e^{-\kappa x}$

κ bestimmen durch Einsetzen in (1)

$\Rightarrow \kappa = -v_0\frac{m}{\hbar^2}$

Theo Tutorium

Aufgabe 9

* $\delta(x-x') = 0$ für $x \neq x'$

** $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x-x') f(x) = f(x')$

$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x) f(x) = f(0)$

$= \int_{-a}^{a} dx\, \delta(x) f(x) = f(0)$ | Grenzen können eingeschränkt werden

Schrödinger-Gleichung für das Problem:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) - \lambda\,\delta(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$x \neq 0 \Rightarrow$ Freies Problem Lsg. der DGl.

$$\Rightarrow \psi(x) = c_1 e^{\varkappa x} + c_2 e^{-\varkappa x}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} c_1^< e^{\varkappa x} + \cancel{c_2^< e^{-\varkappa x}} & \text{für } x < 0 \\ \cancel{c_1^> e^{\varkappa x}} + c_2^> e^{-\varkappa x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$ ($\varkappa$ reell)

für $x<0$ muss $c_2 = 0$ sein, da die Wellenfunktion explodieren würde

für $x>0$ muss $c_1 = 0$ sein

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x) = \left(-\frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\delta(x)\right)\Psi(x)$$

$\rightarrow$ $\Psi(0)$ stetig

$\Psi'(0)$ unstetig

Aufgabe 10

Lsg: die transzendente Gleichung lautet (zur Kontrolle)

$$\boxed{\left(\frac{\kappa\hbar^2}{m\lambda} - 1\right)^2 = e^{-4\kappa a}}$$

Auflösen nach κ

Lsg kann nicht exakt erfolgen, sondern nur für große (?) κ

$\kappa_1 = -\kappa_2$?

Nicht nur den Fall $a \to \infty$ aber a groß

Lsg. bis zur ersten Entwicklung

Michael Goerz

Übungen zur Theoretischen Physik IV, Quantentheorie SS 05, Blatt 2

Hamprecht, Glaum, Nogueira

Aufgabe 5: Normierung im Konfigurations- und im Impulsraum.

Zeigen Sie, dass eine Wellenfuktion $\psi(x)$, die im Konfigurationsraum normiert ist, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

erfüllt, auch im Impulsraum normiert ist, d.h. dass dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(k)|^2 dk = 1$$

ist, wobei $\phi(k)$ die Fouriertransformierte von $\psi(x)$ sei.

2 Punkte

Aufgabe 6: Zeitliche Entwicklung eines Wellenpakets.

Betrachten Sie folgendes Wellenpaket eines freien Teilchens zur Zeit $t = 0$:

$$\psi(x,0) = A[e^{-\mu(x-a)^2+ikx} + e^{-\mu(x+a)^2+ikx}] \; .$$

Es sei $\mu > 0$ und A reell.

1. Normieren Sie $\psi(x, 0)$.
2. Bestimmen Sie $\langle x(t)\rangle$, $\langle p(t)\rangle$, $\Delta x(t)$, und $\Delta p(t)$.
3. Skizzieren Sie $|\psi(x,t)|^2$ für $t = 0$ und für verschiedene $t < 0$ und $t > 0$.

3 Punkte

Aufgabe 7: Energieniveaus im Potentialkasten.

Der heutige Stand der Halbleitertechnik gestattet die Herstellung von Bauelementen, in denen sich Elektronen praktisch frei in einer Ebene zwischen zwei isolierenden Schichten mit nur atomarem Abstand von einander bewegen können. Das folgende Modell, bei dem allein die x-Richtung, senkrecht zu den isolierenden Ebenen, betrachtet wird, beschreibt näherungsweise das Verhalten der Elektronen.

1. Stellen Sie die Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen der Masse m in einem "Kastenpotential"

   $$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } |x| < a/2 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

   auf.

2. Welchen Wert muss $\psi(\pm a/2, t)$ haben und warum?

3. Gehen Sie mit dem Ansatz $\psi(x,t) = \psi(x)\, exp(-i\omega t)$ zur "zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung" über.

4. Bestimmen Sie die Eigenfunktionen $\psi_n(x)$, die zugehörigen Eigenfrequenzen ω_n und die Energieeigenwerte E_n.

5. Die Wellenfunktion des Teilchens habe anfangs die Form $\psi(x,0) = A(a - 2|x|)$ für $|2x| < a$. Normieren Sie sie und stellen Sie sie als Linearkombinationen der Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ dar.

6. Gewinnen Sie einen Ausdruck für die Dichte $\rho(x,t)$ dieses Wellenpakets für beliebige Zeit t und stellen Sie $\rho(x,t)$ für $t = 0$ und für einige weitere geeignet gewählte Zeiten als Funktion von x grafisch dar.

7 Punkte

Ausgabetermin: 18.4.2005, Abgabetermin: 2.5.2005, 8 Uhr

1

Theo Tutorium

24.04.05

Konstantin Glaum
0.3 06
glaum@physik...

(1)

Beh.: $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{ix(k-k')} = \delta(k-k')$$

Bew.:

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{B\to\infty}\int_{-B}^{B} dx\, e^{ix(k-k')}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\lim_{B\to\infty}\frac{1}{i(k-k')}\int_{x=-B}^{x=+B} d[i(k-k')x]\, e^{ix(k-k')}$$

$$= \frac{1}{2\pi i(k-k')}\lim_{B\to\infty} e^{ix(k-k')}\Big|_{-B}^{B}$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\lim_{B\to\infty}\frac{e^{iB(k-k')}-e^{-B(k-k')}}{k-k'} \quad \ldots ?$$

(2)

$$\omega = c_{ph}\cdot k = \frac{\varkappa}{2}k^2$$

$\boxed{\text{Mathematica}}$

Fourier~~funkt~~ transformation

Trick: $x = -i\frac{\partial}{\partial k}$ verwenden

Impulsraum? mit k

Ortsraum? mit x

~~$x\,\phi(k) = x\int\frac{dx'}{\sqrt{2\pi}}$~~

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \phi^*(k)\; x\; \phi(k)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk \;\ldots$$

Theo Tutorium

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, \psi(x)\, k \cdot e^{-ikx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, \psi(x) \left(\frac{1}{-i}\frac{\partial}{\partial x}\right) e^{-ikx}$$

| partielle Integration

$$= \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi(x)\, e^{-ikx}\right)\Big| - \frac{1}{i}\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ikx}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$$

wg. $$-\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\,\psi(x)\, e^{-ikx}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$ (auf beiden Grenzen!)

(3) mit Mathematica!

$\psi(x,t)$

Funktion ψ ist am Rande Null!

(4) Potentialtopf

$$\psi(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

- Eine Bedingung zur Eliminierung einer Konstante c_1/c_2
- Zweite Bedingung zur Bestimmung von λ

(5) $$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\, \sin\left[\pi n \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right)\right]$$ $\boxed{\text{Lsg.}}$

Normierung! – kann vorausgesetzt werden

Theo Tutorium

orthogonalität !

Beh. $\displaystyle\int_{-a/2}^{+a/2} dx\, \psi_n^*(x)\, \psi_m(x) = \delta_{n,m}$

$\Leftrightarrow$

Bew

$$\frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} dx \sin\left[\pi n\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)\right] \sin\left[\pi m\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)\right] =$$

Ziel: Entwicklung

$\psi(x,t) = \sum_n a_n \psi_n(x) e^{-i\omega_n t}$ $\quad a_n$?

$$\int dx\, \psi_m^*(x)\, \psi(x,0) = \sum_n a_n \underbrace{\int dx\, \psi_m^*(x)\, \psi_n(x)}_{\delta_{m,n}}$$

$$= \sum_n a_n \delta_{m,n} = a_m$$

Sinx · Siny (mit Additionstheoremen etc. für oben)

$$= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} = \frac{e^{i(x+y)}-e^{i(x-y)}-e^{-i(x-y)}+e^{-i(x+y)}}{-4}$$

$$= -\frac{e^{i(x+y)}+e^{-i(x+y)}}{4} + \frac{e^{i(x-y)}+e^{-i(x-y)}}{4} = -\frac{\cos(x+y)}{2} + \frac{\cos(x-y)}{2}$$

$$= \frac{2}{2a}\int_{-a/2}^{a/2} dx \left\{\cos\left[\pi(n-m)\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)\right] - \cos\left[\pi(n+m)\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{a}\left\{\frac{\sin\left[\pi(n-m)\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)\right]}{\pi(n-m)/a} - \frac{\sin\left[\pi(n+m)\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)\right]}{\pi(n+m)/a}\right\}\Bigg|_{-a/2}^{a/2}$$

Fallunterscheidung $n \neq m$; $n = m$

Theo Tutorium

$n \neq m$

$$= \frac{1}{a}\left\{0 + 0 + \frac{\sin[\pi(n-m)]}{\pi(n-m)/a} - \frac{\sin[\pi(n+m)]}{\pi(n+m}\right\} = 0$$

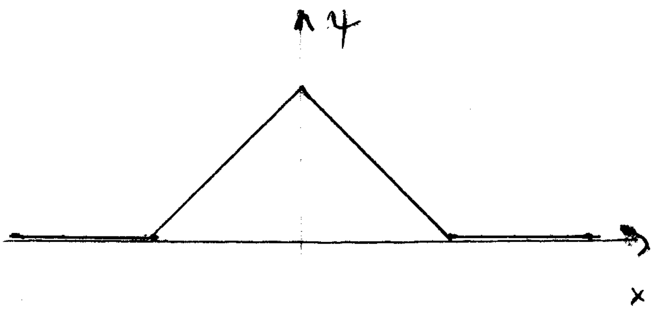
$n = m$

$$= \frac{1}{a}\left\{0 - 0 + \frac{\sin[\pi(n-m)]}{\pi(n-m)/a} - 0\right\} = 1$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{a}\cdot\left\{\frac{\sin\left[\pi(n-m)\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)\right]}{\pi(n-m)/a} - \frac{\sin[\pi \ldots]}{\pi(n+m)/a}\right\}\Bigg|_{-a/2}^{a/2} \overset{(s.o.)}{=} \delta_{n,m}$$

q. e.d.



$$a_m = \int_{-a/2}^{a/2} dx\, \psi_m^*(x)\, \psi(x,0)$$

Integral teilen

$$\int dx\, x\cdot\sin(\alpha x) = \left| \begin{array}{c} dx \sin(\alpha x) \equiv du \\ u = \frac{-\cos(\alpha x)}{\alpha} \end{array} \right|$$

$x \equiv v \Rightarrow dv = dx$

$$= -\frac{x\cos(\alpha x)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int dx \cos(\alpha x)$$

$$= \frac{x\cos(\alpha x)}{\alpha} + \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha^2}$$