

Bericht zum Versuch
**Mie-Streuung an levitierten
Flüssigkeitströpfchen**

Michael Goerz, Anton Haase

30. Oktober 2006

FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Fortgeschrittenenpraktikum Teil A
Tutor: P. Tegeder

Inhalt

1 Einführung	2
1.1 Paulfalle	2
1.2 Mie-Streuung	3
1.3 Thermodynamik eines verdampfenden Tropfens	5
1.4 Messgleichung für Q/m	6
2 Fragestellung	6
3 Versuchsaufbau und Durchführung	7
3.1 Aufbau	7
3.2 Beobachtung von Glaskügelchen in der Paulfalle	7
3.3 Stabilitätsgrenzen	7
3.4 Messung an Aerosoltröpfchen	7
3.5 Kalibrierung der Apparatur für die Messung der Mie-Streuung	8
3.6 Ermittlung des Verdampfungskoeffizienten	8
4 Auswertung	9
4.1 Masse-Ladungs-Verhältnis der Glaskügelchen	9
4.2 q -Wert der Paulfalle im Gleichgewicht	9
4.3 Stabilitätsgrenzen der Paulfalle	10
4.4 Verdampfungsparameter der Aerosoltröpfchen	10
5 Zusammenfassung	11

1 Einführung

1.1 Paulfalle

Die Paulfalle ist eine Anordnung von Elektroden, die mit Hilfe von Wechselfeldern ein geladenes Teilchen in der Schwebe halten kann. Wir fordern, dass das Teilchen eine Kraft zum Schwebepunkt hin erfährt, und dass die rücktreibende Kraft linear zur Auslenkung ist. Das anzusetzende Potential ist also ein dreidimensionaler harmonischer Oszillator.

$$\phi = \phi_0(t) (\lambda x^2 + \sigma y^2 + \gamma z^2) \quad (1)$$

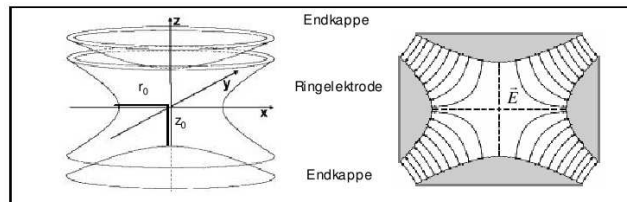


Abb. 1: Aufbau und Potential in der Paulfalle (aus [1])

Da die Laplacegleichung bei statischen Feldern Minima und Maxima des Potentials verbietet, wird desweiteren angenommen, dass das Potential zeitlich oszilliert:

$$\phi_0(t) = U - V_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (2)$$

Aus der Laplacegleichung $\Delta\phi = 0$ für den ladungsfreien Raum folgt sofort die Bedingung

$$\lambda + \sigma + \gamma = 0 \quad (3)$$

Um dies zu lösen, lässt sich $\lambda = \sigma$ und $\gamma = -2\lambda$ ansetzen und man erhält mit $x^2 + y^2 = r^2$:

$$\phi = \phi_0(t)(\sigma r^2 - 2\sigma z^2) \quad (4)$$

Wir betrachten nun die Bewegungsgleichung

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = -q\nabla\phi \quad (5)$$

Setzt man aus Dimensionsgründen $\lambda = \sigma = \frac{1}{4r_0^2}$ berechnet man in Zylinderkoordinaten:

$$\phi = [U - V \cos(\omega t)] \cdot \frac{r^2 - 2z^2}{4r_0^2} \quad (6)$$

$$\nabla\phi = \vec{e}_r [U - V_0 \cos(\omega t)] \cdot \frac{r}{2r_0^2} + \vec{e}_z [U - V_0 \cos(\omega t)] \cdot \frac{z}{r_0^2} \quad (7)$$

Getrennt in r - und z -Richtung bedeutet dies:

$$\ddot{r} = \frac{q}{2mr_0^2} [U - V_0 \cos(\omega t)] \cdot r \quad (8)$$

$$\ddot{z} = \frac{q}{mr_0^2} [U - V_0 \cos(\omega t)] \cdot z \quad (9)$$

Mit einigen geeigneten Substitutionen kann man nun auf die Matthieu-Differentialgleichungen kommen:

$$\omega t \equiv 2\xi \quad (10)$$

$$\ddot{r} \equiv \frac{d^2 r}{d\xi^2} = r'' \quad (11)$$

$$\ddot{z} \equiv \frac{d^2 z}{d\xi^2} = z'' \quad (12)$$

$$U \equiv -\frac{mr_0^2 \omega^2}{4q} \cdot a_z = \frac{mr_0^2 \omega^2}{2q} \cdot a_r \quad (13)$$

$$V \equiv \frac{mr_0^2 \omega^2}{2q} \cdot q_z = \frac{mr_0^2 \omega^2}{q} \cdot q_r \quad (14)$$

$$z'' = -[a - 2q \cos(2\xi)] \cdot z \quad (15)$$

$$r'' = -[a - 2q \cos(2\xi)] \cdot r \quad (16)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lässt sich darstellen als

$$z = \alpha' e^{\mu\xi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} c_{2s} e^{2is\xi} + \alpha'' e^{-\mu\xi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} c_2 e^{-2is\xi} \quad (17)$$

Gleiches gilt für r .

Offensichtlich gibt es zwei Anteile in der Lösung, einer bei dem z exponentiell ansteigt, und einer bei dem z beschränkt bleibt. Die Funktion μ hängt von a_z und q_z , bzw. a_r und q_r ab, sodass diese beiden Parameter regeln, ob die Lösung stabil ist oder nicht. Entsprechende Werte sind in Abb. 2 dargestellt.

1.2 Mie-Streuung

Im Jahr 1906 publizierte Gustav Mie eine analytische Lösung für die Streuung elektromagnetischer Wellen an sphärischen mesoskopischen dielektrischen Partikeln, deren Durchmesser in Größenordnung der Wellenlänge der gestreuten Strahlung liegt. Die detaillierte Rechnung erfordert jedoch einigen Aufwand. Wir wollen und daher hier nur auf die Grundzüge der mathematischen Herleitung beschränken. Ausgehend von den Maxwellgleichungen der klassischen Elektrodynamik erhält man mit dem Ansatz (aus [3])

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(z) \cdot e^{i\omega t} \quad (18)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0(z) \cdot e^{i\omega t} \quad (19)$$

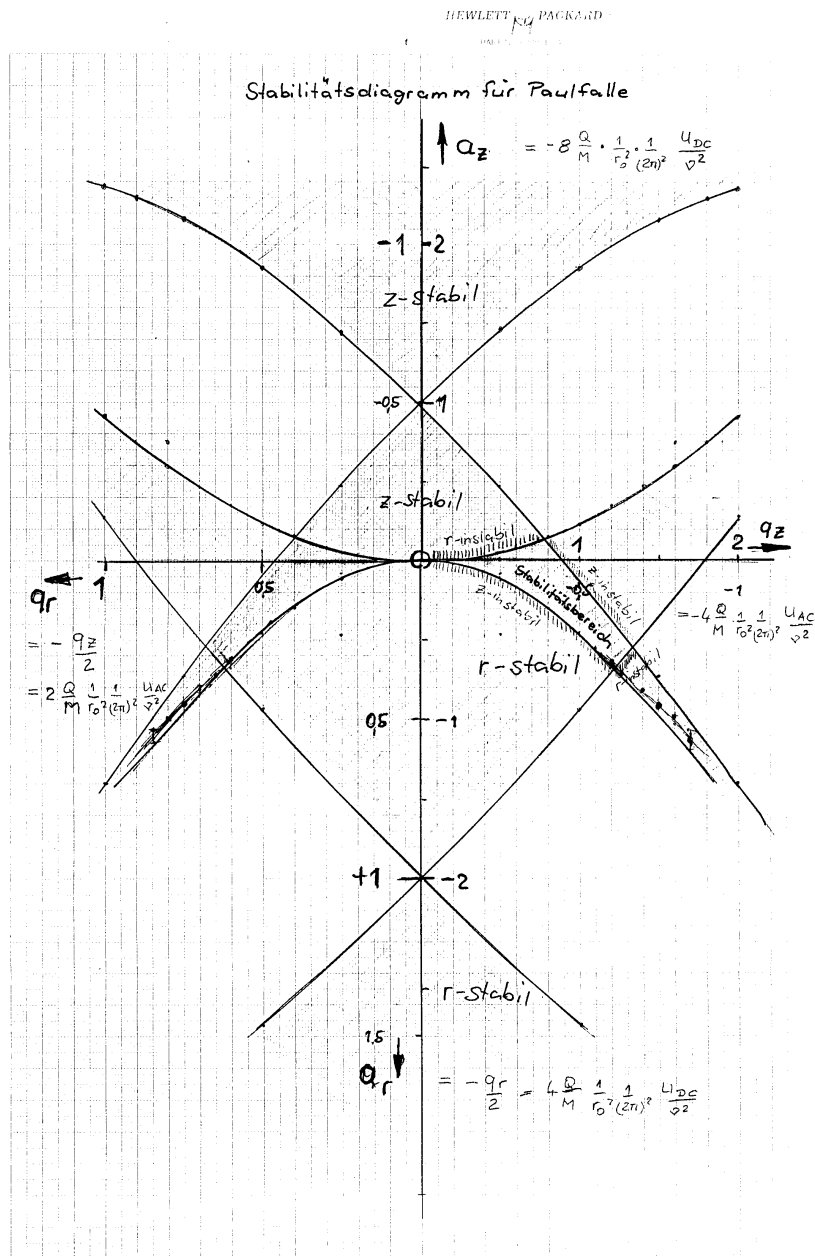


Abb. 2: Stabilitätsdiagramm der Paulfalle

die Beziehungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (21)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mu_0\mathbf{H} \quad (22)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon_0\epsilon\mathbf{E} \quad (23)$$

und daraus in einem weiteren Schritt die Wellengleichungen

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0 \quad (24)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H} = 0 \quad (25)$$

Gesucht ist ein skalares Potential, aus dem die elektromagnetischen Felder berechnet werden können. Da es sich im Falle eines sphärischen Körpers um ein radialsymmetrisches Problem handelt, ist die Einführung von Kugelkoordinaten sinnvoll. Ein für solche Probleme typische Separationsansatz führt auf eine unendliche Reihe, die die assoziierten Legendre Polynome enthält. Zur endgültigen Lösung des Problems sind die Bestimmung der auftretenden Entwicklungskoeffizienten an Hand der Randbedingungen erforderlich, die jedoch in Kugelkoordinaten spezifiziert sind, wobei die einfallende ebene Welle jedoch in kartesischen Koordinaten vorliegt.

Das Problem ist dennoch analytisch lösbar und führt auf einen Ausdruck für die Streueffizienz, der wiederum den Streuprozess charakterisiert (aus [2])

$$Q_{Streu} = \frac{2}{x^2} \sum_{l=1}^N (l+1)(|a_l|^2 + |b_l|^2), \quad (26)$$

wobei $x = \frac{2\pi r}{\lambda}$ der sog. Mie-Parameter ist. Bei a_l und b_l handelt es sich um die Mie-Streukoeffizienten, die von den sphärischen Besselfunktionen, Hankelfunktionen und dem (komplexen) Brechungsindex m abhängen.

Beim durchzuführenden Versuch ist davon auszugehen, dass sich der Brechungsindex des untersuchten Partikels nicht ändert. Das Streuverhalten hängt also im Wesentlichen nur von dem Radius r der Tropfen ab (die Wellenlänge λ ist selbstverständlich ebenfalls durch den Laser fest vorgegeben). Damit ist es möglich aus dem beobachteten Streuungsmuster durch einen (computerunterstützten) Vergleich mit dem oben skizzierten theoretischen Modell auf den Radius der Objekte zu schließen.

1.3 Thermodynamik eines verdampfenden Tropfens

Die Verdampfung eines Tropfens ohne Temperaturänderung wird durch Diffusion von Atomen an der Oberfläche beschrieben. Dabei ist zu beachten, dass das Volumen der Tropfens (und damit die Gesamtmenge der Atome) kubisch mit dem Radius R wächst, die Oberfläche an der der Verdampfungsprozess stattfindet jedoch nur quadratisch. Aus dieser einfachen Überlegung kann eine Formel zur quantitativen Erfassung der Radiusänderung konstruiert werden:

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{S}{2} \frac{1}{R} \quad (27)$$

S ist dabei der Verdampfungsparameter, welcher selbstverständlich von den Umgebungsbedingungen abhängt. Die zu erwartende zeitliche Entwicklung der Kugelradius lässt sich nun durch einfache Integration ermitteln.

$$\int_{R_0}^{R(t)} 2R \, dR = - \int_0^t S \, dt \quad (28)$$

$$\Rightarrow R(t) = \sqrt{R_0^2 - St} \quad (29)$$

1.4 Messgleichung für Q/m

Die Bestimmung des $\frac{Q}{m}$ Verhältnisses ist nur bei perfekter Kompensation der Gravitationskraft möglich. In einem solchen Fall gilt gerade

$$Q \cdot E = m \cdot g, \quad (30)$$

also elektrostatische Kraft gleich Gewichtskraft. Die Krümmung der Elektroden macht eine numerische Berechnung der elektrischen Feldstärke E erforderlich, die

$$E = 0.798 \frac{U_{\text{Deckel}} - U_{\text{Boden}}}{2z_0} \quad (31)$$

ergibt. Setzt man dies in Gleichung (30) ein, so erhält man die Lösung

$$\frac{Q}{m} = \frac{g 2z_0}{0.798(U_{\text{Deckel}} - U_{\text{Boden}})} \quad (32)$$

Für den Zusammenhang zwischen z_0 und dem Radius der Ringelektrode gilt

$$r_0 = \sqrt{2}z_0 \quad \Leftrightarrow \quad z_0 = \frac{r_0}{\sqrt{2}}. \quad (33)$$

Damit wird Gleichung (32) nach Einsetzen der Parameter ($g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $r_0 = 5 \text{ mm}$) zu

$$\frac{Q}{m} = \frac{0.0869}{U_{\text{Deckel}} - U_{\text{Boden}}} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \quad (34)$$

2 Fragestellung

Ziel des Versuches ist es, mit Hilfe einer Paulfalle zunächst Glaskügelchen und danach Aerosoltröpfchen in der Schwebe zu halten und an ihnen Mie-Streuung durchzuführen. Insbesondere mit den Glaskügelchen sollen die Funktionsweise und die Parameter der Paulfalle ausgetestet werden, es werden das Masse-Ladungs-Verhältnis der Glaskügelchen gemessen und die Stabilitätsgrenzen der Paulfalle untersucht.

An den Aerosoltröpfchen wird die Mie-Streuung genutzt, um den zeitlichen Verlauf des Verdampfens der Tröpfchen zu untersuchen. Es wird der Verdampfungskoeffizient bestimmt.

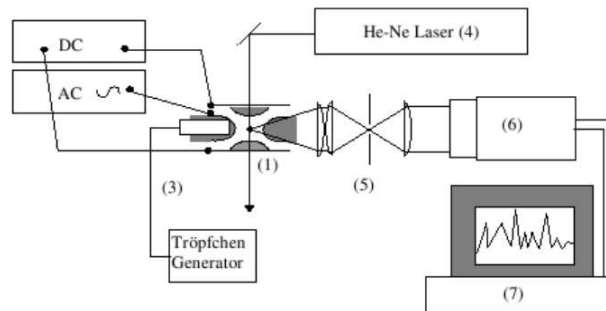


Abb. 3: Versuchsaufbau

3 Versuchsaufbau und Durchführung

3.1 Aufbau

Der Versuchsaufbau ist schematisch in Abb. 3 dargestellt. Die Paulfalle (1), wurde von zwei Spannungsgeneratoren gesteuert, einen Gleichspannungsgenerator zum Ausgleich der Gewichtskraft und einem Wechselspannungsgenerator für das eigentliche Fallen-Potential. Mithilfe des He-Ne-Lasers (4) wurde die Falle ausgeleuchtet und auf die CCD-Kamera (6) abgebildet, die das Bild zur Auswertung an einen Computer (7) weitergab.

3.2 Beobachtung von Glaskügelchen in der Paulfalle

Zunächst haben wir Glaskügelchen manuell in die Falle eingeführt, um uns mit der Apparatur vertraut zu machen und geeignete Einstellungen für eine gute Stabilität zu finden. Diese Einstellungswerte konnten dann genutzt werden, um das Ladungs-Masse-Verhältnis der Kugeln gemäß Gl. (34) zu bestimmen. In einem weiteren Schritt haben wir daraus den q -Wert der Falle errechnet.

3.3 Stabilitätsgrenzen

Im Anschluss daran haben wir bei festem Parameter $a_z = -U \cdot \frac{q}{m} \cdot (r_0 \pi \nu)^{-2}$ (aus Gl. 13), d.h. also bei ausgeschalteter Gleichspannung U , die Stabilitätsgrenzen der Falle ausgemessen und mit dem theoretischen Stabilitätsdiagramm (Abb. 2) verglichen.

3.4 Messung an Aerosoltröpfchen

Im zweiten Teil des Versuchs wurden statt der Glaskügelchen Aerosoltröpfchen untersucht. Dazu haben wir die Apparatur unter Verwendung einer Linse und einer Blende (5) durch genaue Festlegung des im Computer ausgewerteten Winkelbereichs kalibriert.

3.5 Kalibrierung der Apparatur für die Messung der Mie-Streuung

Durch die Geometrie des Aufbaus konnte ein Maximalwinkel von $\tan(\phi_{\max}) = \frac{2\text{mm}}{5\text{mm}}$ auf den CCD-Bildschirm von 722 Pixeln abgebildet werden. Dies haben wir auf dem Schirm auf einen relevanten Bereich von 302 Pixeln reduziert, sodass der effektive Winkel für die Messung der Mie-Streuung in dem Bereich $85.25^\circ \leq \phi \leq 94.79^\circ$ lag.

3.6 Ermittlung des Verdampfungskoeffizienten

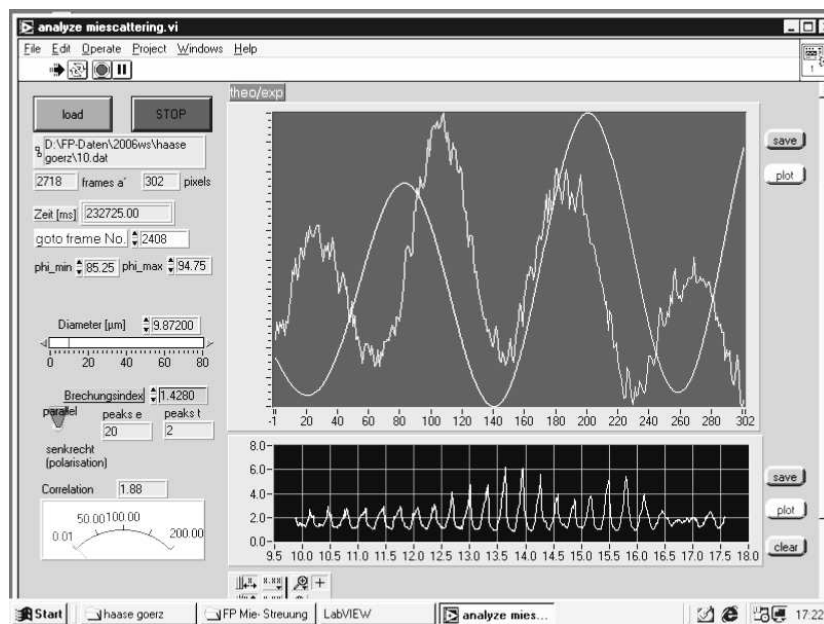


Abb. 4: Screenshot des Programms zur Auswertung der Mie-Streuung

In mehreren Versuchen konnten wir anschließend Messungen der Mie-Streuung an den Aerosoltröpfchen durchführen, welche mit einer elektronischen Pumpe (3) eingesprüht wurden. Die Bilder der CCD-Kamera (Abb. 5) wurden vom Computer aufgezeichnet und vermessen. Die beste dieser Messungen (d.h. die Messung am langlebigsten Tröpfchen (262 s)) haben wir dann mit Hilfe der Spezialsoftware (Abb. 4) ausgewertet. Die Software erlaubte die Berechnung einer theoretischen Messkurve für einen frei variierbaren Radius. Durch Vergleich dieser Messkurve mit der tatsächlichen konnten wir eine Messreihe aufnehmen, die den Radius des verdampfenden Tröpfchens über die Zeit wiedergab. Daraus konnte ein Wert für den Verdampfungskoeffizient des Tröpfchens gewonnen werden.

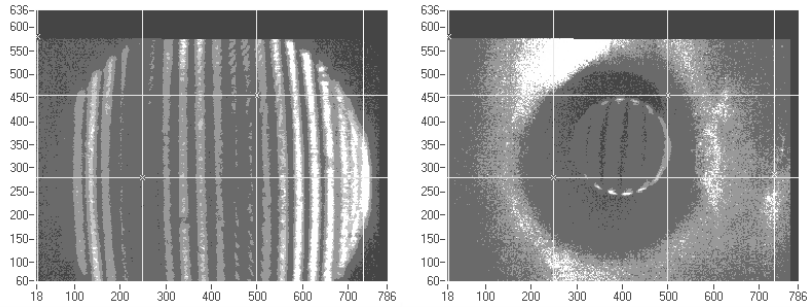


Abb. 5: Exemplarische Bilder der Aerosoltröpfchen

4 Auswertung

4.1 Masse-Ladungs-Verhältnis der Glaskügelchen

Das Masse-Ladungs-Verhältnis der Glaskügelchen ist unmittelbar aus Gl. (34) zu berechnen, also aus der Gleichspannung, die angelegt werden muss, um den Fall der Kügelchen im Gravitationsfeld auszugleichen. Die Ergebnisse der Rechnung sind in in Tabelle 1 zu sehen.

U_{Boden} [V]	U_{Deckel} [V]	Q/m [C/kg]
7 ± 1	-10 ± 1	-0.0051 ± 0.0003
3 ± 1	-6 ± 1	-0.0097 ± 0.0011
-25 ± 1	22 ± 1	0.0018 ± 0.0001
-13 ± 1	10 ± 1	0.0038 ± 0.0002
16 ± 1	-20 ± 1	-0.0024 ± 0.0001
35 ± 1	-39 ± 1	-0.0012 ± 0.0001
12 ± 1	-15 ± 1	-0.0032 ± 0.0001
-11 ± 1	8 ± 1	0.0048 ± 0.0002

Tabelle 1: Masse-Ladungs-Verhältnis

Leider steht uns für diese Ergebnis keine Vergleichswerte zur Verfügung. Es ist aber davon auszugehen, dass die gemessenen Masse-Ladungs-Verhältnisse nur sehr bedingt die Wirklichkeit widerspiegeln, das die verwendete Formel von einem freien Fall ausgeht, was bei unserem Aufbau nicht im geringsten gegeben ist, die Kügelchen schweben vielmehr.

4.2 q-Wert der Paulfalle im Gleichgewicht

Nimmt man zum Masse-Ladungs-Verhältnis noch die Frequenz und Amplitude der Wechselfspannung sowie die Abmessung r_0 der Paulfalle hinzu, lässt sich der aktuelle q-Wert der Falle berechnen. Dazu kann Gl. 14 umgeformt werden zu

$$q_z = \frac{q}{m} \cdot \frac{2V}{r_0^2(2\pi\nu)^2} \quad (35)$$

Das Ergebnis dieser Rechnung ist in Tabelle 2 dargestellt.

V [V]	ν [Hz]	Q/m [C/kg]	q_z
4000 ± 100	200 ± 10	-0.0051 ± 0.0003	1.0 ± 0.1
5500 ± 100	280 ± 10	-0.0097 ± 0.0011	1.4 ± 0.2
4000 ± 100	118 ± 10	0.0018 ± 0.0001	1.1 ± 0.2
4000 ± 100	174 ± 10	0.0038 ± 0.0002	1.0 ± 0.1
4000 ± 100	169 ± 10	-0.0024 ± 0.0001	0.7 ± 0.1
4000 ± 100	202 ± 10	-0.0012 ± 0.0001	0.2 ± 0.1
4000 ± 100	201 ± 10	-0.0032 ± 0.0001	0.6 ± 0.2
4000 ± 100	201 ± 10	0.0048 ± 0.0002	0.9 ± 0.2

Tabelle 2: q-Wert der Paulfalle

4.3 Stabilitätsgrenzen der Paulfalle

Zum Austesten der Stabilitätsgrenzen der benutzten Paulfalle haben wir lediglich die Amplitude der Wechselspannung variiert und damit direkt den Wert von q_z geändert (vergl. Gl. (35)). Wie man dem entsprechenden Abschnitt aus der Abb. 2 entnehmen kann, sind für den Parameter q_z (bei $a = 0$) Werte zwischen 0 und 1 zu erwarten, um ein Teilchen stabil in der Falle zu halten. Die Ergebnisse unserer Messungen sind in Tabelle 3 aufgeführt.

Q/m [C/kg]	ν [Hz]	untere Schranke		obere Schranke	
		V [V]	q_z	V [V]	q_z
-0.0097 ± 0.0011	190 ± 10	1100 ± 100	0.6 ± 0.1	5650 ± 100	3.1 ± 0.6
-0.0024 ± 0.0001	100 ± 10	1600 ± 100	0.8 ± 0.2	4700 ± 100	2.3 ± 0.6
-0.0032 ± 0.0001	125 ± 10	1500 ± 100	0.6 ± 0.2	4850 ± 100	2.0 ± 0.6
0.0048 ± 0.0002	116 ± 10	1400 ± 100	1.0 ± 0.2	5500 ± 100	3.8 ± 0.6

Tabelle 3: Stabilitätsgrenzen

Unsere Messwerte können die theoretische Vorhersage also nicht bestätigen. Es war uns möglich ein Teilchen bis zu einem Wert von $q_z = 3.8$ in der Falle zu stabilisieren. Der Grund dafür liegt in den Umgebungsbedingungen unseres Experiments. Der theoretisch ermittelte Wert geht von einem Vakuum innerhalb der Paulfalle aus. In unserem Aufbau war dies jedoch nicht gewährleistet. Die Glaskügelchen waren stets von Luft umgeben und wurden durch diese in ihrer Bewegung stark gedämpft bzw. beeinflusst. Dies wurde insbesondere durch in der Luft schwebende statt frei fallende Glaskügelchen deutlich.

4.4 Verdampfungsparameter der Aerosoltröpfchen

Um aus Gl. (29) den Verdampfungskoeffizienten S zu bestimmen, haben wir in Abb. 6 den Verlauf der Quadrats des Tröpfchenradius über der Zeit aufgetragen.

Zur Bestimmung des Fehlers haben wir einen Minimalfehler des Kügelchen-Durchmessers von $0.2 \mu\text{m}$ angenommen, und diesen mit der Qualität der Übereinstimmung zwischen theoretischer und gemessener Kurve („Correlation“ in Abb. 4) gewichtet. Einer Übereinstimmung von 0 haben wir dabei den Faktor 3 zugewiesen, der Maximalübereinstimmung den Faktor 1 (also Minimalfehler).

Der Fehler von R^2 berechnet sich damit zu

$$\Delta R^2 = R \cdot 0.2\mu\text{m} \cdot \left(3 - \frac{u}{10}\right) \quad (36)$$

An der Steigung der mit diesem Fehler gewichteten Ausgleichsgeraden ist S abzulesen. Der erhaltene Wert ist

$$S = (1.637 \pm 0.015) \cdot 10^{-12} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Auch für diese Messung steht uns leider kein Vergleichswert zur Verfügung.

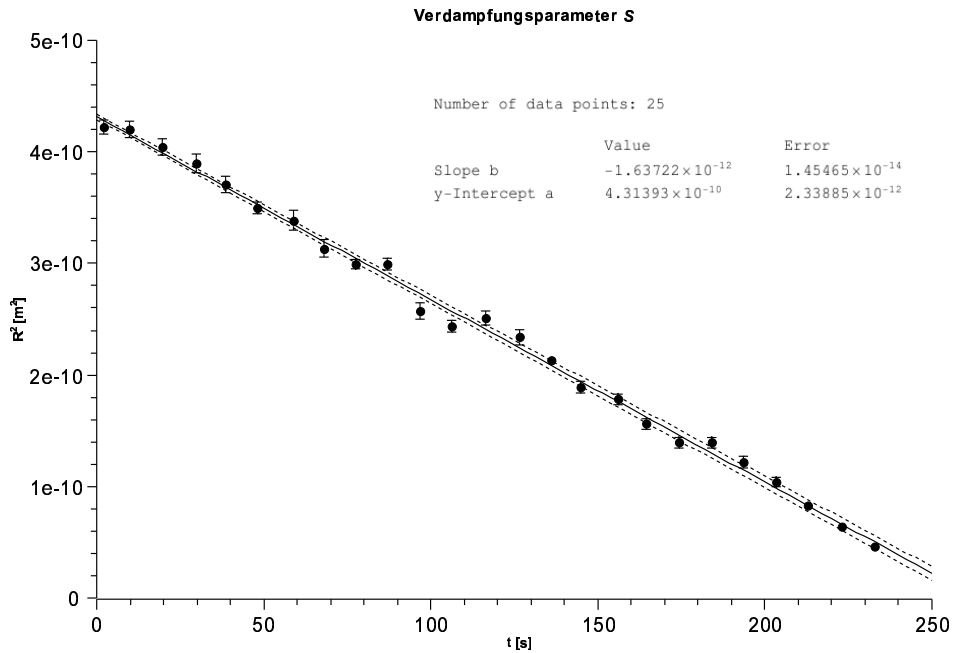


Abb. 6: Bestimmung der Verdampfungsparameters

5 Zusammenfassung

Wir haben im Versuch erfolgreich die Funktionsweise der Paulfalle ausgetestet. Die dabei ermittelten Werte für den Stabilitätsbereich sind allerdings nicht verträglich mit der theoretischen Erwartung. Wie schon erläutert, gibt es ganz erhebliche Störungen durch die Tatsache, dass der Versuch nicht im Vakuum durchgeführt wurde. Angesichts der Größe der Glaskügelchen bzw. Aerosole im Mikrometerbereich kann nicht davon ausgegangen werden, dass ein Modell welches die Teilchen im freien Fall annimmt die Situation korrekt beschreibt. So ist dann auch nicht davon auszugehen, dass der ermittelte Wert für das Masse-Ladungs-Verhältnis der Wirklichkeit entspricht. Da kein Vergleichswert vorliegt, lässt sich dies nicht überprüfen.

Die Messung des Verdampfungskoeffizienten ist uns mit großer Genauigkeit gelungen, aber auch hier kann das Ergebnis mangels eines Literaturwertes leider nicht überprüft werden. Es war allerdings erhebliche Sorgfalt notwendig, um zu

akkuraten Ergebnissen zu kommen. Die Übereinstimmung von theoretischem und gemessenen Wert im Auswertprogramm ist stark von der verwendeten Rasterung abhängig (d.h. in welchen Schritten der Radius variiert wird), eine gute Übereinstimmung kann sehr leicht übersehen werden, da das Programm teilweise über sie hinwegspringt. Es waren daher mehrere Kontrollmessungen nötig.

Insgesamt wäre es sinnvoll, den Versuch im Vakuum durchzuführen und Vergleichswerte für die Ergebnisse heranzuziehen.

Literatur

- [1] GROTHKOPP, Peter: *Experiment Paulfalle*. 2006. – URL <http://www.physik.uni-greifswald.de/grossespraktikum/paulfalle.pdf>
- [2] SCHMIDT, Oliver: *Betrachtung von chemischen Strukturen und mesoskopischen Strukturen auf Oberflächen mittels spektroskopischer Photoelektronenmikroskopie*, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, Diplomarbeit, 2001
- [3] WEISSTEIN, Eric: *Mie Scattering*. 10 2006. – URL <http://scienceworld.wolfram.com/physics/MieScattering.html>