Schwerependel

Michael Goerz, Anton Haase

Physikalische Grundlagen

Harmonische Schwingung des Schwerependels:

In Analogie zu $F = m \cdot a$ gilt bei Drehbewegungen $M = I \cdot \ddot{\phi}$, wobei M das Drehmoment und I das Trägheitsmoment ist. Beim Schwerependel wirkt das rücktreibende Drehmoment $M_r = m \cdot g \cdot \sin\phi \, l$, mit der Näherung $\sin\phi \approx \phi$ für kleine Winkel ergibt sich die Differentialgleichung

$$\ddot{\phi} - \frac{m \cdot g \cdot l}{I} \phi = 0$$

mit den Exponentialansatz erhält man eine harmonische Schwingung mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot l}{I}}$

$$\cancel{\Rightarrow T_0 = 2\pi \, m g l}$$

$$\Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot l}}$$

Man definiert die reduzierte Pendellänge

$$L := \frac{I}{m \cdot l}$$, sodass

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Ist die Auslenkung zu groß, als dass mit der Näherung $\sin\phi \approx \phi$ gerechnet werden könnte, erweitert sich die Differentialgleichung zu

$$\ddot{\phi} - \frac{m \cdot g \cdot l}{I} \left[\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \dots \right] = 0$$

Diese Gleichung ist nicht mehr linear und schwer zu lösen. Es ergibt sich, dass T abhängig ist von ϕ:

$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\phi_0}{2} + \dots \right],$$

genähert $T = T_0 \left[1 + \frac{\phi_0^2}{16} \right]$

Bei der Berechnung des Trägheitsmoments für die Pendelstange wendet man den Steinerschen Satz an. Da die Stange nicht genau an ihrem Ende aufgehängt ist, betrachtet man sie zweigeteilt

Reversionspendel:

Beim Reversionspendel wird die Betrachtung des Trägheitsmoments zur Vereinfachung der Messung benutzt. Man sucht zwei Schwerpunktsabstände $l = s_1, s_2$ mit der gleichen Schwingzeit:

$$2\pi \sqrt{\frac{I_s + m s_1^2}{m s_1 g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_s + m s_2^2}{m s_2 g}}$$

$$\Leftrightarrow s_2 \left(\frac{I_s + m s_1^2}{s_1} \right) = I_s + m s_2^2$$

$$\Leftrightarrow s_2^2 - \frac{I_s + m s_1^2}{m s_1} s_2 + \frac{I_s}{m} = 0$$

für $s_1 \neq s_2$:

$$s_2 = \frac{I_s + m s_1^2}{2 m s_1} + \sqrt{\left(\frac{I_s + m s_1^2}{2 m s_1} \right)^2 - \frac{I_s}{m}}$$

$$= \frac{I_s + m s_1^2}{2 m s_1} + \sqrt{\frac{(I_s + m s_1^2)^2}{4 m^2 s_1^2} - \frac{4 I_s m s_1^2}{4 m^2 \cdot s_1^2}}$$

$$= \frac{I_s + m s_1^2 + \sqrt{(I_s + m s_1^2)^2 - 4 I_s m s_1^2}}{2 m s_1}$$

$$= \frac{I_s + m s_1^2 + \sqrt{I_s^2 - 2 I_s m s_1^2 + m^2 s_1^4}}{2 m s_1}$$

$$= \frac{I_s + m s_1^2 + (I_s - m s_1^2)}{2 m s_1} = \frac{I_s}{m s_1}$$

s_2 ist also genau die ~~verkürzte~~ reduzierte Pendellänge von s_1

Aufgaben

1) Messung der Schwingungszeit eines Schwerependels (Pendel ohne Zusatzmassen) in Abhängigkeit von der Amplitude

2) Messung der Fallbeschleunigung nach der Reversionsmethode (Pendel mit aufgesetzten Zusatzmassen)

16.3.05

Messprotokoll

Michael Goerz, Anton Haase
Tutor: Enrico Schierle
16.3.05 Beginn 10^{00} Ende 12^{00}

Geräte:

Pendelstange, Länge $= (1{,}6700 \pm 0{,}0005)\,m$
Schneidenabstand $L = (0{,}9941 \pm 0{,}0002)\,m$

Schneiden symmetrisch

Masse der Pendelstangen

$$\boxed{m_I = (1{,}260 \pm 0{,}002)\,kg}$$
$$m_{II} = (1{,}254 \pm 0{,}002)\,kg$$
$$m_{III} = (1{,}255 \pm 0{,}002)\,kg$$

$g = 9{,}81278\ m/s^2$

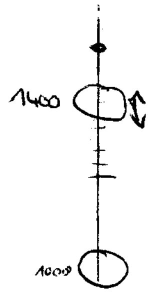
zu Aufg. 1 Messung der Schwingzeit

n	φ (cm)	t ($\frac{1}{100}$ sec)	Stoppuhr t (sec)
10	6 ±0,3	1970	19,5 ±0,5
10	6	1970	19,9
10	9	1970	19,8
10	9	1970	19,8
20	6	3936	39,3
20	6	3938	39,5
20	9	3935	39,5
20	9	3937	39,6
20	12	3939	39,5
20	12	3942	39,5
20	15	3944	39,5
20	15	3944	39,6
20	18	3945	39,6
20	18	3945	39,6
20	21	3947	39,6
20	21	3947	39,6
20	24	3949	39,5
20	24	3949	39,5
20	27	3950	39,5
20	27	3949	39,5
20	30	3953	39,6
20	30	3952	39,7

zu Aufg 2

1) Masse 1000 g unten "Position a"

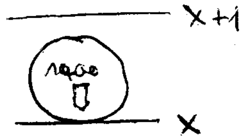
Masse 1400 g ab Position 0 x



$n = 20$

$\phi = 16$

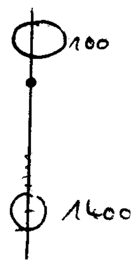
x	T 1.Mess	T 2.Mess
1	3868	3867
2	3865	3864
4	3862	3862
6	3863	3863
8	3868	3868
10	3877	3877
12	3892	3891
14	3910	3910
16	3935	3934
18	39.65	3965
20	4001	4001
22	4043	
24	4092	



1 Skalenteil = 2 cm

∅ Gewichte 10 cm

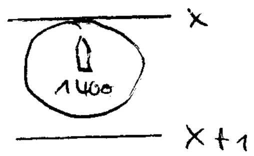
2) Umgedrehtes Pendel



$n = 20$

$\phi = 16$

x	T
24	4099
22	4049
20	4000
18	3952
16	3907
14	3863
12	3825
10	3789
8	3756
6	3728
4	3705
2	3688
1	3682



16.03.05

Auswertung

Aufgabe 1, theoretische Betrachtung

Zum Vergleich mit der Messung kann das Trägheitsmoment und die Schwingungsdauer berechnet werden

Allgemein gilt für einen eindimensionalen Stab der Länge l und der Masse m die Beziehung

$$I = \frac{m}{12} \cdot l^2$$

Im vorliegenden Fall muss das Trägheitsmoment getrennt auf beiden Seiten der Aufhängung betrachtet werden (mit dem Steinerschen Satz)

Die Massen der Teilstäbe der Länge l_1 und l_2 verhalten sich zueinander wie die Längen selbst

$$m_1 = m \frac{l_1}{l_1 + l_2}$$

$$m_2 = m \frac{l_2}{l_1 + l_2} \quad ; \; l_1 + l_2 = l \qquad m_1 + m_2 = m$$

Damit gilt dann

$$I = \frac{m_1}{12} l_1^2 + m_1 \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 + \frac{m_2}{12} l_2^2 + m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2$$

$$= \frac{m}{3} \left(l_1^2 - l_1 l_2 + l_2^2 \right)$$

Mit $l_1 = (0{,}33795 \pm 0{,}00027)\ \text{m}$

$l_2 = (1{,}33205 \pm 0{,}00027)\ \text{m}$

$m = (1{,}260 \pm 0{,}002)\ \text{kg}$

ergibt sich

$$I = (0{,}6041 \pm 0{,}0077)\ kg\,m^2$$

und

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot s}} = (1{,}9700 \pm 0{,}0253)\ s$$

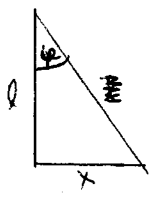
mit $s = \frac{L}{2}$ (Schwerpunktsabstand)

Vergleich der Messmethoden:

Die Messung der Schwingungsdauer wurde einmal mit der Handstoppuhr und einmal mit der Lichtschranke gemessen. Die Stoppuhr erlaubt eine Messung auf $\frac{1}{10}$ sec, mit einem Reaktionszeitfehler von 0,5s Innerhalb des Fehlers waren alle gemessenen Zeiten identisch Die Messung liefert also keine Aussage Demgegenüber erlaubt die Lichtschranke eine Messung auf $\frac{1}{100}$ sec mit einem Fehler von 1digit. Die Reproduzierbarkeit (Kontrollmessung) war dabei recht hoch, sodass von einer guten Genauigkeit ausgegangen werden kann.

Graphische Auswertung:

Für die graphische Auswertung muss die horizontale Auslenkung in Radian umgerechnet werden



$\varphi = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{l}\right)$, wobei l die Länge des Pendels gemessen ab der Aufhängung ist.

Für die Größe φ^2 sind die Fehler in der graphischen Auswertung nicht relevant

Unter Vernachlässigung der Ausreißer ergibt sich dann für die Ausgleichsgerade

Steigung 0,1408

Achsenabschnitt 1,96984

und für die Grenzgerade

Steigung 0,2008

Achsenabschnitt 1,96864

Es wurde also $T_0 = (1,9698 \pm 0,0022)\,s$

und die relative Steigung $\frac{T_0}{a}$ mit

$a = (13,99 \pm 5,97)$

Aufgabe 2

Mit Hilfe der graphischen Auswertung kann die Periodendauer T_0 ermittelt werden, die für beide Aufhängungen gleich ist

Im Breich des Schnittpunkts wird dann linear approximiert. Der Schnittpunkt der beiden Ausgleichsgeraden ist

$10\,T_0 = (40,270 \pm 0,004)\,s$

Da die reduzierte Pendellänge vorgegeben ist als $(0,9941 \pm 0,0002)\,m$, lässt sich umstellen:

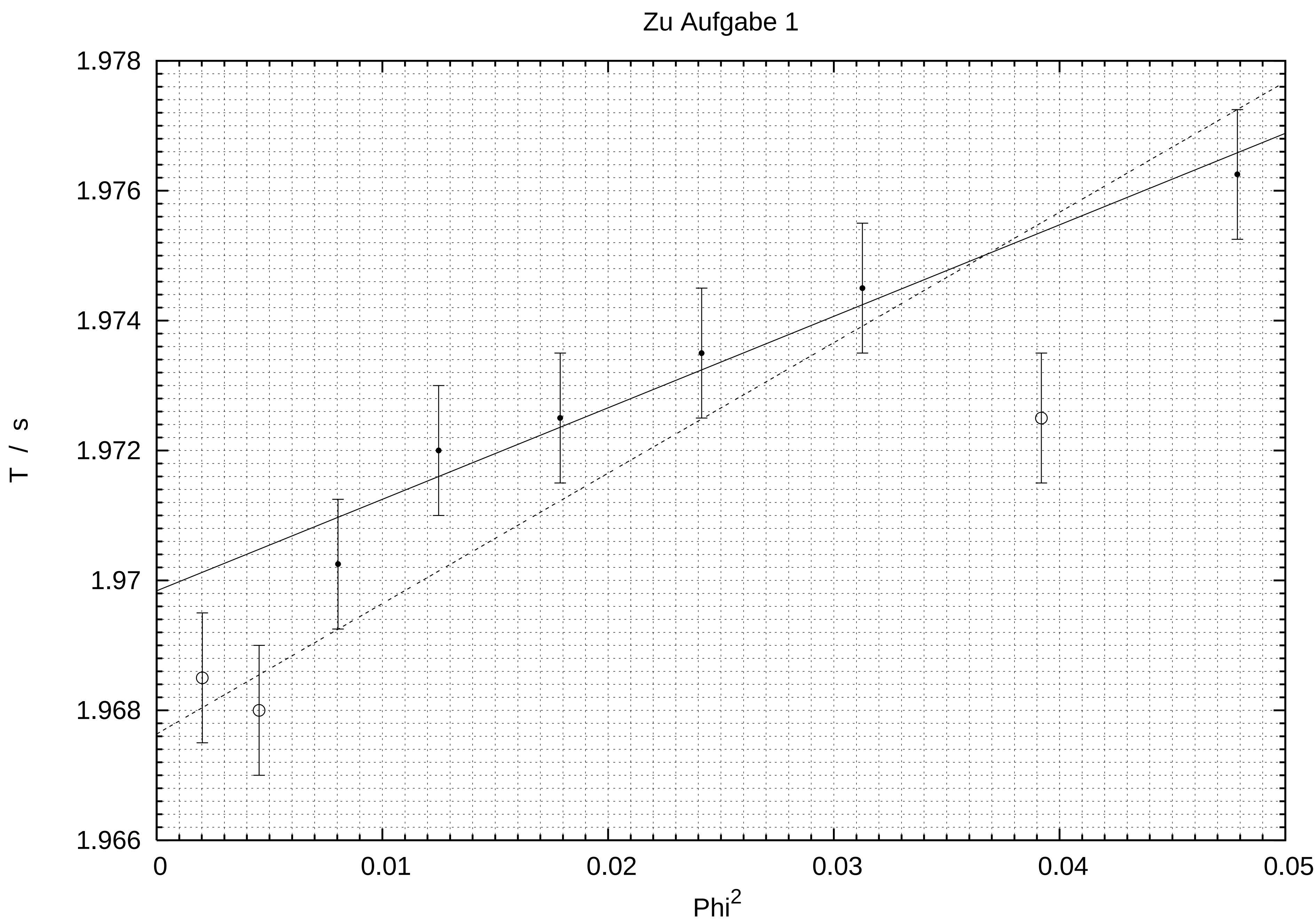
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Leftrightarrow g = \frac{L}{\left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2}$$

Einsetzen ergibt

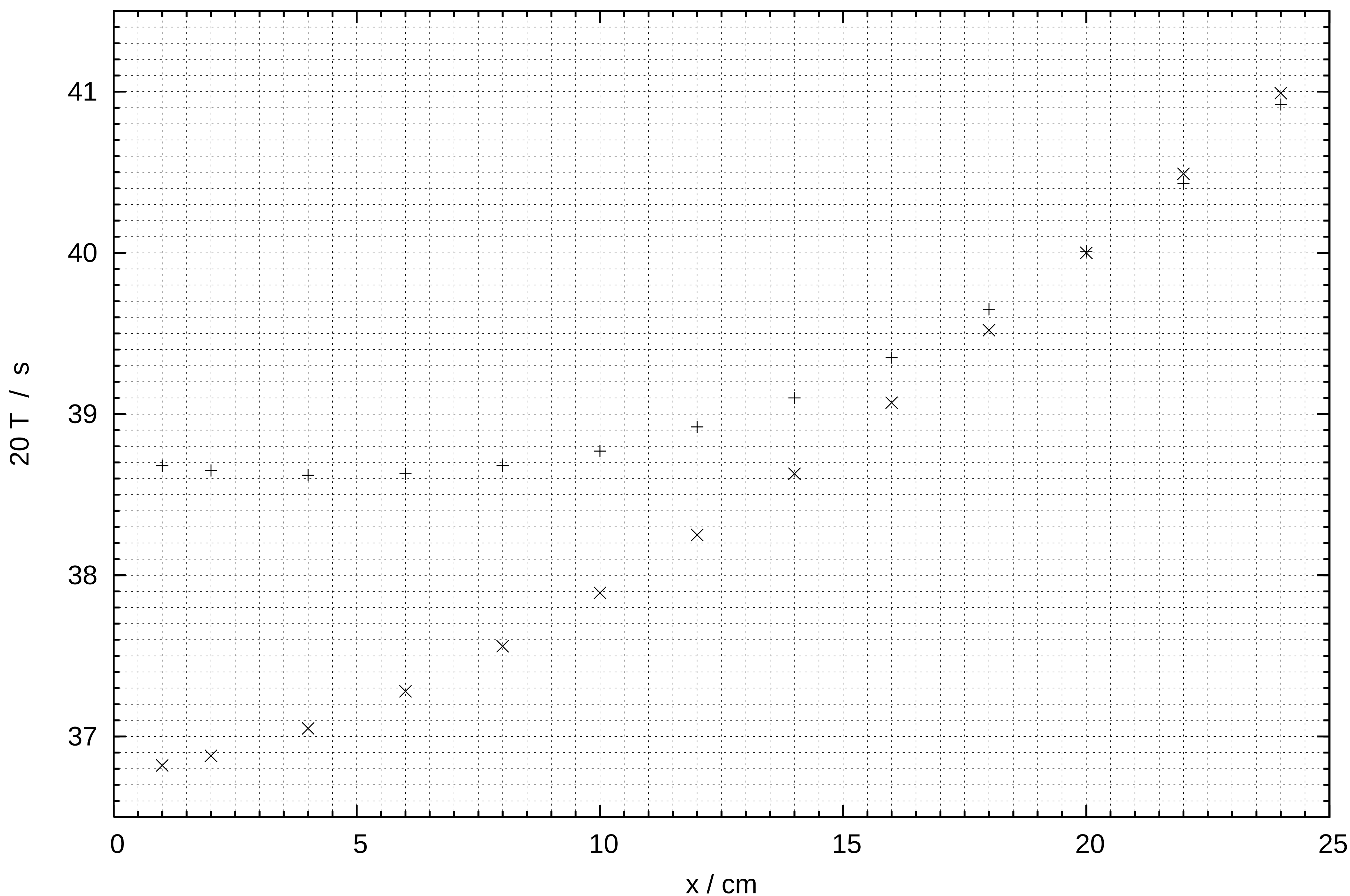
$g = (9,68 \pm 0,01)\,m/s^2$

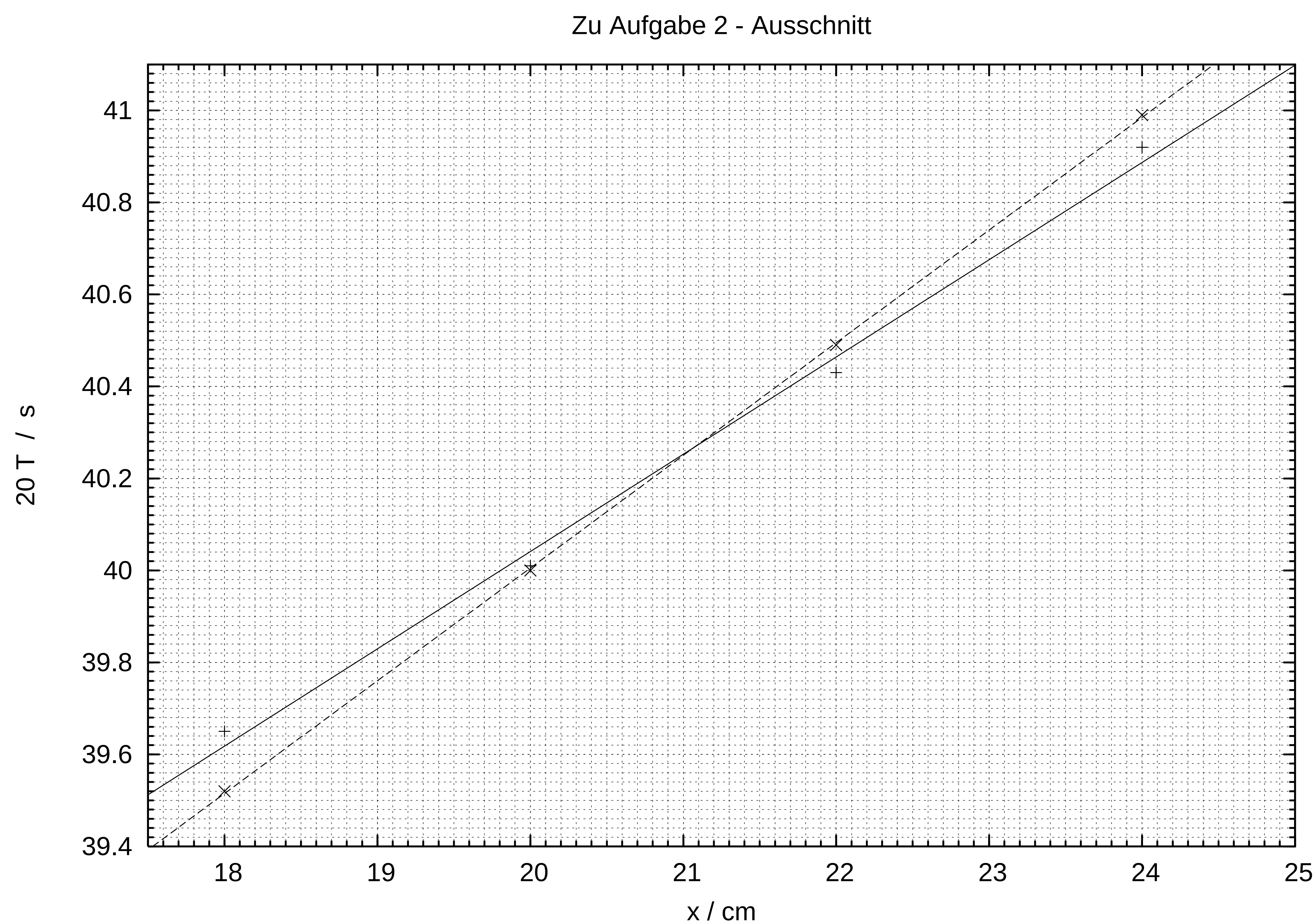
Zu Aufgabe 1

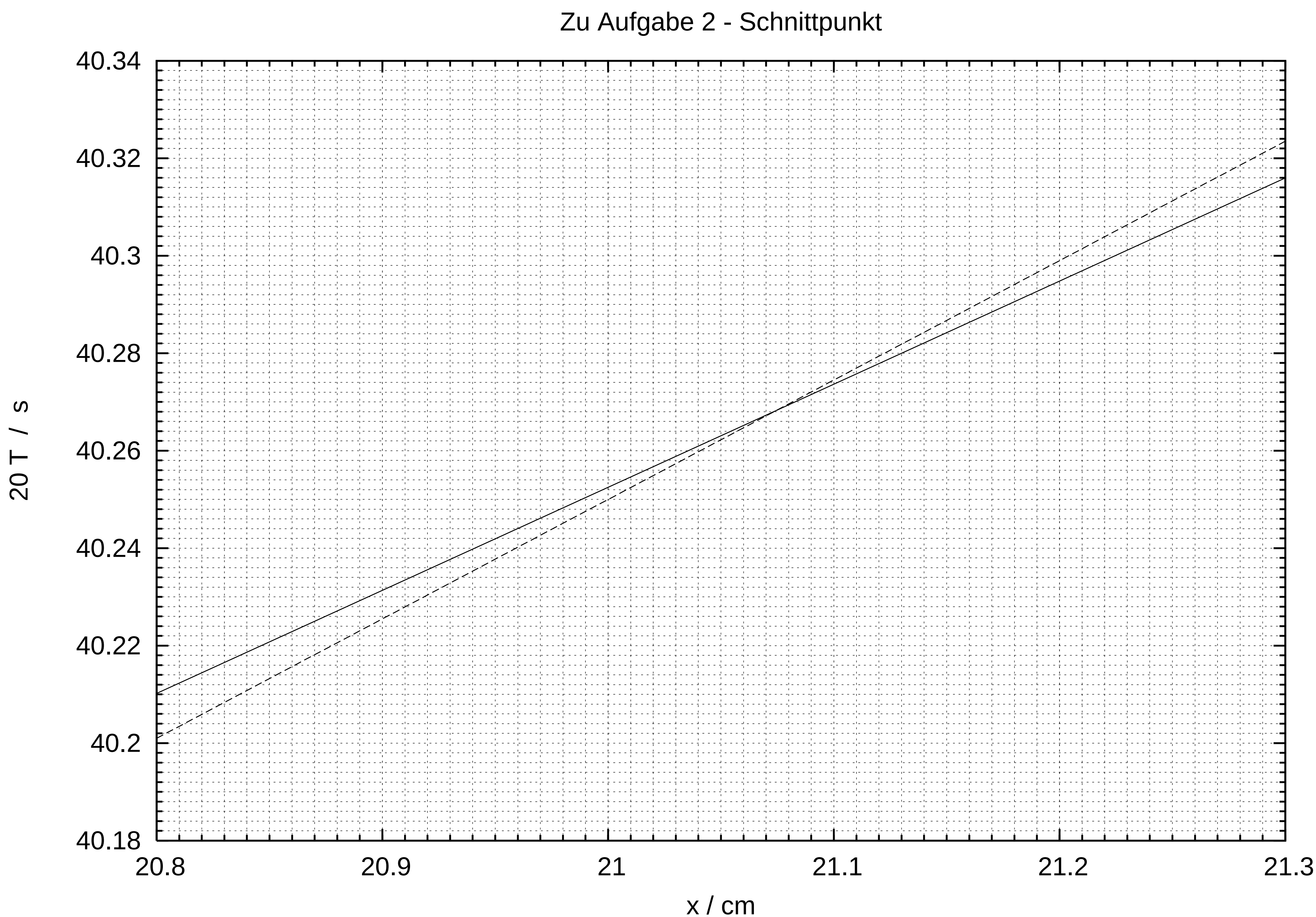
Schwing.	Ausl. (cm)	Fehler	Phi (rad)	Fehler	Phi^2 (m^2)	Fehler	Schwingzeit (s) Mess.1	Schwingzeit (s) Mess.2	Schwingzeit (s) gemittelt	Fehler	Period. T (s)	Fehler
20	6	0.3	0.0450	0.0002	0.00202	0.00002	39.36	39.38	39.370	0.008	1.969	0.001
20	9	0.3	0.0674	0.0001	0.00454	0.00002	39.35	39.37	39.360	0.008	1.968	0.001
20	12	0.3	0.0897	0.0001	0.00804	0.00002	39.39	39.42	39.405	0.008	1.970	0.001
20	15	0.3	0.1118	0.0001	0.01249	0.00003	39.44	39.44	39.440	0.008	1.972	0.001
20	18	0.3	0.1337	0.0001	0.01788	0.00003	39.45	39.45	39.450	0.008	1.973	0.001
20	21	0.3	0.1554	0.0001	0.02415	0.00004	39.47	39.47	39.470	0.008	1.974	0.001
20	24	0.3	0.1768	0.0001	0.03127	0.00004	39.49	39.49	39.490	0.008	1.975	0.001
20	27	0.3	0.1980	0.0001	0.03919	0.00004	39.5	39.4	39.450	0.008	1.973	0.001
20	30	0.3	0.2188	0.0001	0.04787	0.00005	39.53	39.52	39.525	0.008	1.976	0.001


Zu Aufgabe 1
1.978
1.976
1.974
1.972
1.97
1.968
1.966
T / s
0
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
Phi^2

Zu Aufgabe 2 - Uebersicht




Zu Aufgabe 2 - Ausschnitt
20 T / s
41
40.8
40.6
40.4
40.2
40
39.8
39.6
39.4
18
19
20
21
22
23
24
25
x / cm


Zu Aufgabe 2 - Schnittpunkt
40.34
40.32
40.3
40.28
40.26
40.24
40.22
40.2
40.18
20 T / s
20.8
20.9
21
21.1
21.2
21.3
x / cm

Zusammenfassung und Diskussion

In Aufgabe 1 konnte der erwartete Zusammenhang voll bestätigt werden. Der gemessene Wert für T_0 ist identisch mit dem berechneten. Auch die Steigung von $\frac{T_0}{16}$ wurde identisch gemessen, allerdings mit recht großem Fehlerintervall. Insgesamt hat sich die Linearität, in Bezug auf ϕ^2, wenn auch mit ~~A~~ Ausreißern, bestätigt. Dank der Messung mit der Lichtschranke war die Genauigkeit recht zufriedenstellend.

In Aufgabe 2 wurde leider ein signifikant unterschiedlicher Wert für die Fallbeschleunigung gemessen, obwohl die Messgenauigkeit wie in Aufg. 1 anzusetzen ist. Es muss von systematischen Fehlern ausgegangen werden. Da T_0 quadratisch im Nenner steht, haben Fehler hier einen relativ großen Einfluss. Die lineare Approximation liefert eine Quelle für Fehler, allerdings kaum ausreichend, um das Ergebnis zu verbessern. Terme höherer Ordnung durch die Auslenkung spielen ebenfalls keine Rolle. Merkwürdig ist, dass T_0 zu hoch gemessen wurde, sodass der Fehler nicht auf Reibung zurückzuführen ist.