

Schallwellen

Michael Goerz, Anton Haase

Physikalische Grundlagen

Die Ausbreitung einer Welle in einem Gas oder einem Festkörper beruht auf einer mechanischen Störung des Systems, die durch das Material läuft, als Schwingung mit gegebener Rückstellkonstante D . Bei Gasen gilt

$$D = k = \text{Kompressionsmodul} ; k = \kappa \cdot p = \frac{c_p}{c_v} \cdot p$$

Allgemein ist dann die Ausbreitungsgeschwindigkeit gegeben durch $c = \sqrt{\frac{D}{\rho}}$, für Gase also (ideales G.)

$$c = \sqrt{\frac{\kappa \cdot p}{\rho}} ; \rho = \rho(T) = \frac{p}{R_{sp} \cdot T} ; R_{sp} = \frac{R}{M_{\text{mol}}}$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{\kappa \cdot R_{sp} \cdot T}, \text{ bei Luft ist } M_{\text{mol}}^{\text{Luft}} = 0,02896 \text{ kg/mol}$$

In Festkörpern ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit über das Elastizitäts- bzw. das ~~Sp~~ Schermodul als Rückstellkonstante gegeben.

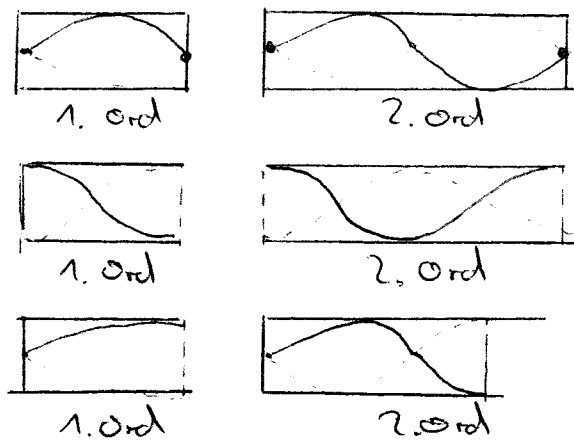
$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (E = -\frac{dP}{dL} \cdot L \text{ bez. auf Längswand.})$$

Die Überlagerung hin- und rücklaufender Wellen kann eine stehende Welle bilden, wenn die Überlagerung der Teilwellen konstruktiv ist, d.h. wenn Wellenlänge (und damit Frequenz) in bestimmten Verhältnis zur Länge des Resonators stehen.

Es gibt dabei stehende Wellen unterschiedlicher Ordnungen ($n = 1, 2, 3, \dots$), wobei die Anzahl der Wellenbäuche gezählt wird.

Zudem muss berücksichtigt werden, ob der Resonator an seinen Enden offen oder geschlossen ist. An offenen Enden können sich nur Wellenbäuche, an geschlossenen nur Wellenknoten befinden.

gut!



Darstellung des Drucks

Ein Wellenbauch umfasst jeweils eine halbe Wellenlänge.

Bei fester Einspannung:
Darstellung der Auslenkung

Daraus lässt sich sofort das Verhältnis von Wellenlänge und Länge des Resonators einer bestimmten Ordnung und Konfiguration bestimmen.

Für einen einseitig abgeschlossenen Resonator:

$$l = \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Für einen beidseitig abgeschlossenen Resonator:

$$l = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Mit $c = v \cdot \lambda$ lässt sich dann die Ausbreitungsgeschwindigkeit ~~aus~~ berechnen als

$$c = \frac{2v \cdot l}{n} \quad \text{bzw.} \quad c = \frac{2v \cdot l}{\left(n - \frac{1}{2}\right)}$$

Beim 1. Versuch wird die Schallgeschwindigkeit in Luft direkt durch Laufzeitmessung bestimmt.

Im 2. Versuch wird $c = \frac{2v \cdot l}{n}$ gemessen und daraus $\kappa = \left(\frac{c}{R_{sp} \cdot T}\right)^2$ bestimmt.

Im 3. Versuch wird die Schallgeschwindigkeit

in einem Festkörper direkt und über die Resonanz gemessen und daraus das Elastizitätsmodul $E = c^2 \cdot \rho$ bestimmt

Unterschiedliche Frequenzen werden im Festkörper sich unterschiedlich schnell ~~abgedämpft~~^{gedämpft} (Fourier-Transformierte der Erregung), daher die direkte und die Messung über die Resonanz.

✓ / Folie

Aufgaben

- 1) Messung der Schallgeschwindigkeit in Luft durch Laufzeitmessung.
- 2) Beobachtung der Resonanzen einer Luftsäule mit abgeschlossenem bzw. offenem Ende durch Variation der Anregungsfrequenz. Berechnung der Schallgeschwindigkeit und des Verhältnisses der spezifischen Wärmen $c_p/c_v = \kappa$ von Luft
- 3) Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Metallen aus der Laufzeit bzw. der Grundschwingungsfrequenz für zwei verschiedene Einspannungen des Stabes. Berechnung des Elastizitätsmoduls des Metalls.

Messprotokoll

Michael Gure, Anton Hause

Tutor: Hr. Hotzel

4.3.05 Beginn 10³⁰ Uhr Ende 13⁰⁰ Uhr

Geräte:

Resonanzrohr $l = (1,018 \pm 0,003) \text{ m}$

Voltcraft-Funktionsgenerator FG 1617 (Anzeigefehler)

Voltcraft-Multimeter HC-5050DB

Speicheroszilloskop PCS 100
Amplitudenfehler Güteklasse 3
Zeitfehler 10^{-5}

Metallstäbe

$l = (1,400 \pm 0,003) \text{ m}$

Dichte von Messing $\rho_{\text{ms}} = (8,4 \pm 0,1) 10^3 \text{ kg/m}^3$

Dichte von Stahl $\rho_{\text{st}} = (7,5 \pm 0,3) 10^3 \text{ kg/m}^3$

Zu Aufg. 1:

Abstand	Lautzeit
(30 ± 2) cm	0,56 ms ± 0,01 Ablesfehler
"	0,54 ms
40 cm	0,82 ms Verwarten: falsche
"	0,84 ms Messung
50 cm	1,15 ms → Klatsche wechseln
"	1,15
60	1,45
"	1,43

Abstand	Laufzeit	
70 cm	1,98 ms	Watschogewicht
70	1,98	
50	1,41	Fehler Ablesung
30	0,80	$\leq 50 : \pm 0,01$
30	0,82	$> 50 : \pm 0,02$
40	1,13	(Umstellung Anzeiger)
40	1,13	
50	1,42	
60	1,69	
60	1,69	
80	2,29	
80	2,20	
90	2,50	
90	2,54	
100	2,74	
100	2,75	
150	4,15	
150	4,19	

Raumtemperatur $22^{\circ} \pm 1^{\circ} \text{ C}$

Zu Aufg. 2:

~~Ord~~ ~~Frequenz (Hz)~~ geschlossenes Rohr

Ord	Frequ (Hz)
1	191 ± 1 Hz "Ablesegenauigkeit"
2	344
3	506
4	673
5	830 838
6	1009
7	1174
8	1349
9	1517
10	1684
11	1850
12	2020
13	
14	
15	
16	
17	
13	2189
14	2352
15	2521
16	2690

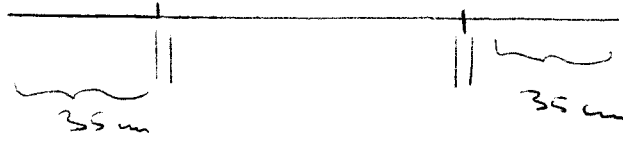
keine Triebnung mehr möglich

Öttháros Pohr

Ord	Frequ (Hz)
1	122
2	265
3	418
4	579
5	750 (gehört)
6	908
7	1078
8	1244
9	1412
10	1576
11	1743
12	1910
13	2078 ± 3
14	2236 (gehört)
15	2395

zu Aufg. 3

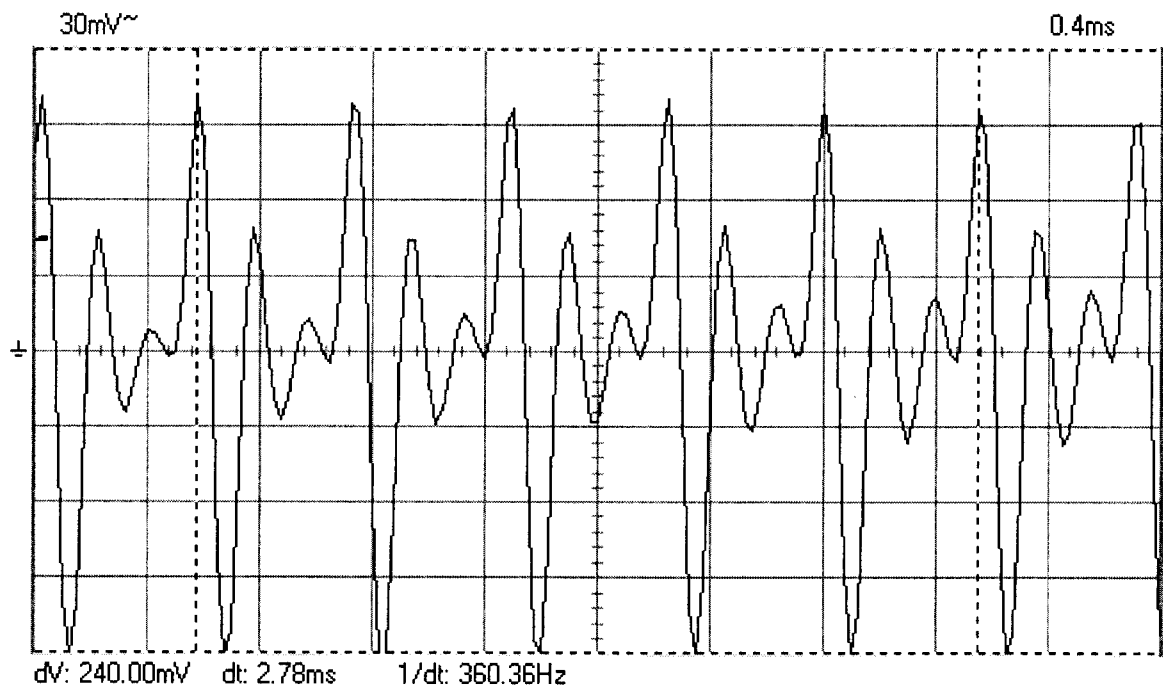
- 1) einfach eingespannt Stahl
- 2) doppelt eingespannter Stahl



Siehe gedruckte Graphen

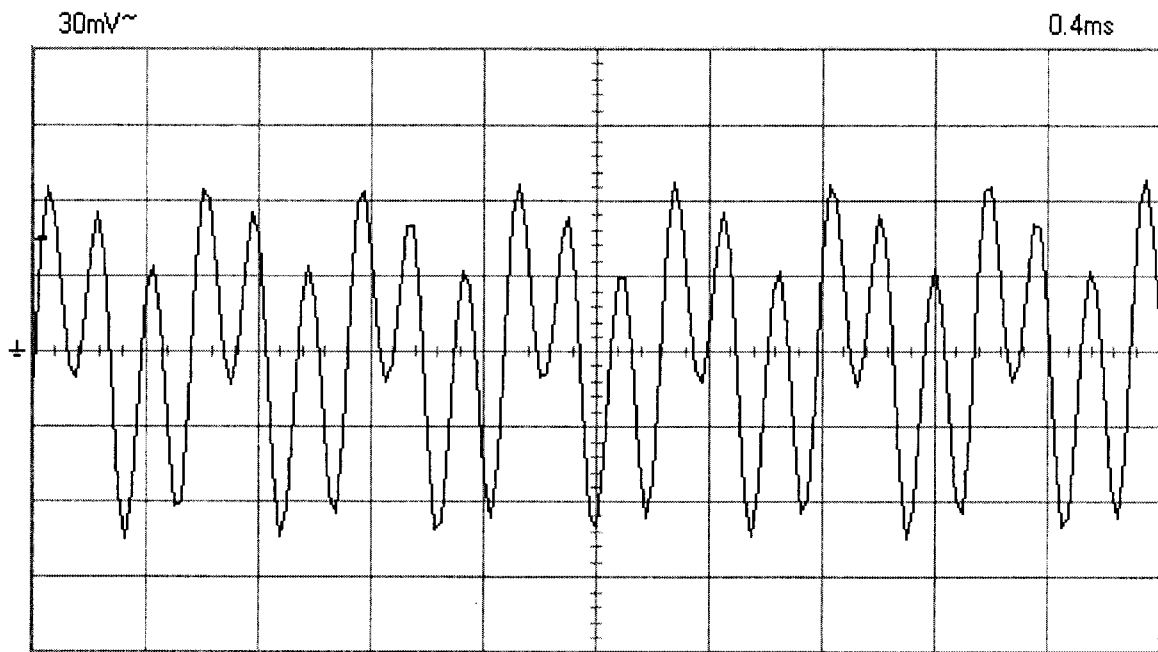
A handwritten signature, possibly "H. H.", written in black ink.

1)



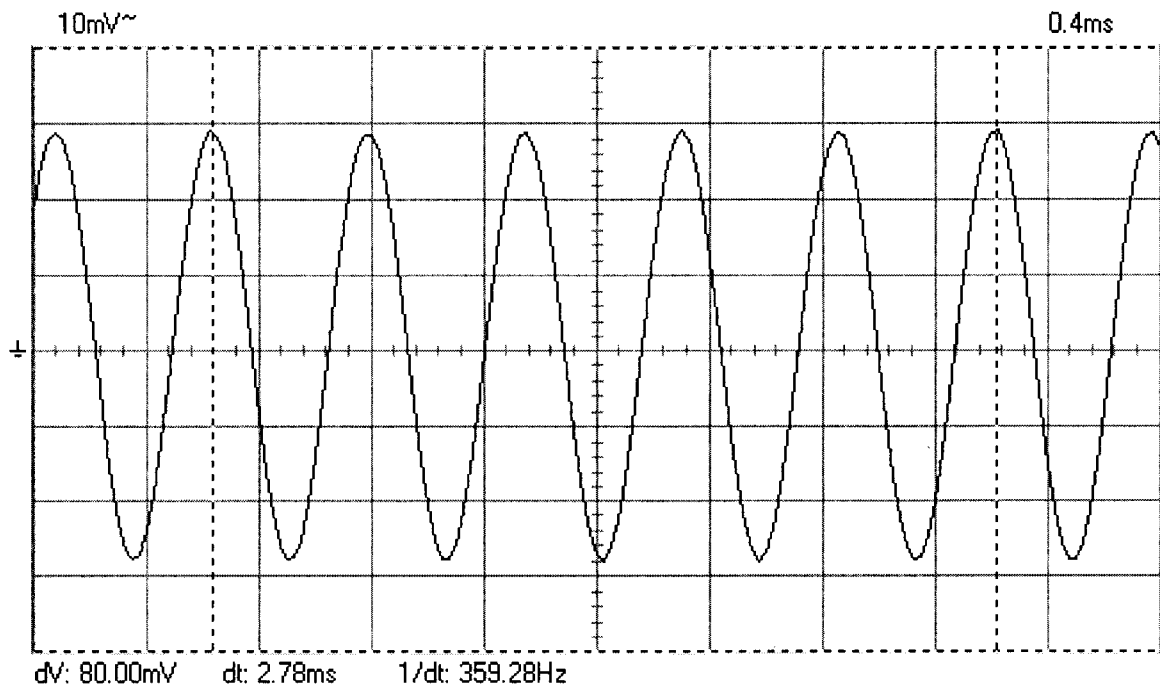
Stahl - einfach mittig eingespannt - Anfang der Schwingung

1)



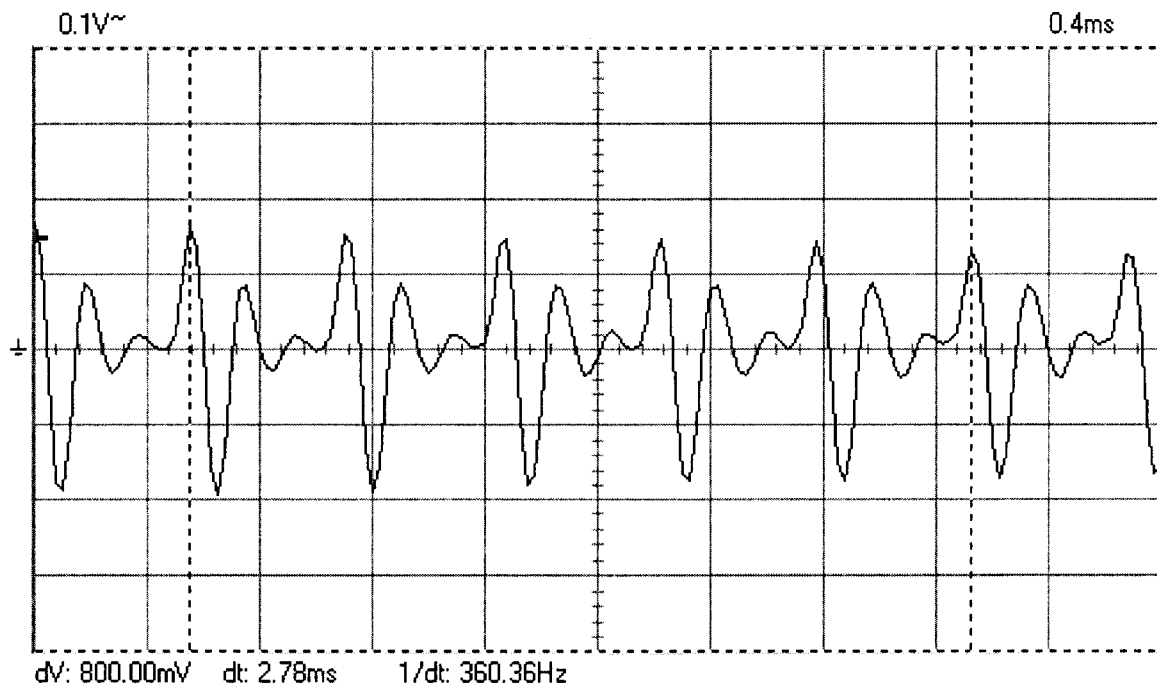
Stahl - einfach mittig eingespannt - mittlerer Teil der Schwingung

1)



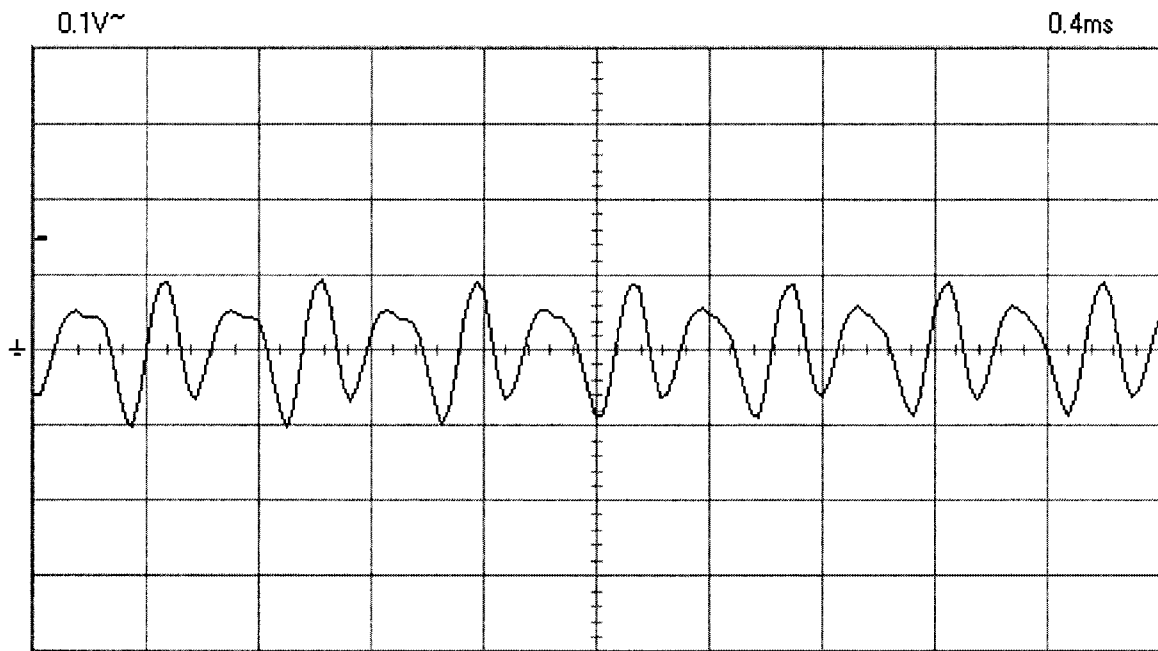
Stahl - einfach mittig eingespannt - Endphase

2)



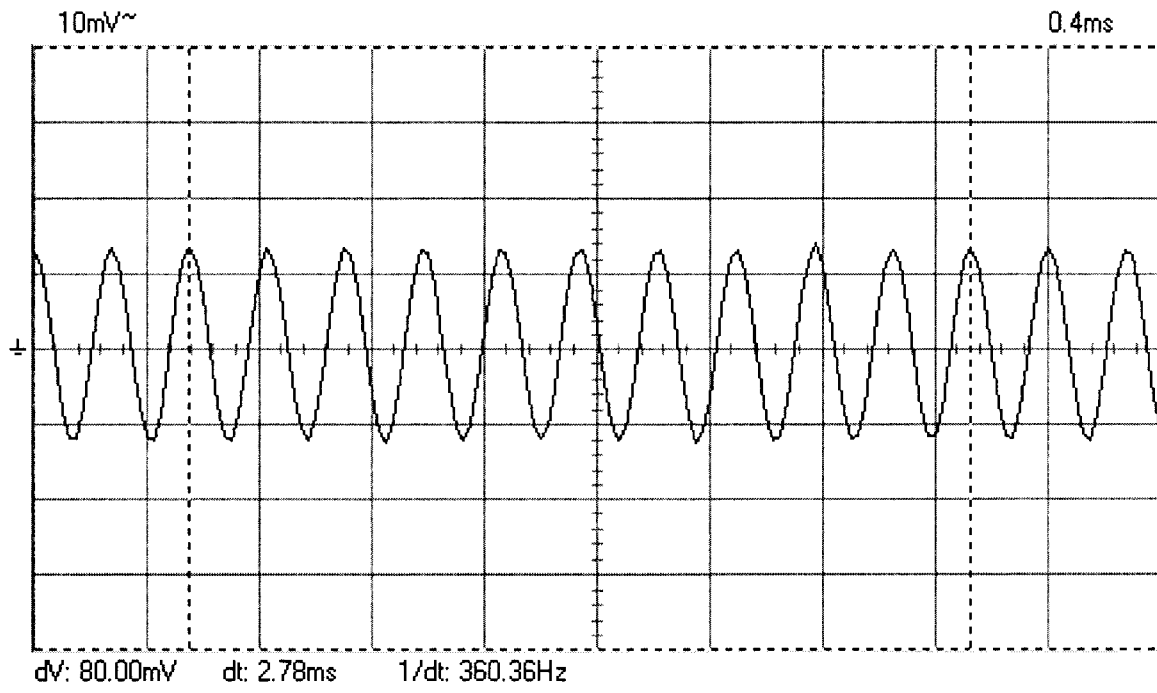
Stahl - doppelt eingespannt - Anfang der Schwingung

2)



Stahl - doppelt eingespannt - mittlerer Teil der Schwingung

2)



Stahl - doppelt eingespannt - Endphase

Auswertung

Aufgabe 1:

siehe tabellarische Auswertung

Die Schallgeschwindigkeit als Durchschnitt aller Messwerte ergibt sich als $358,72 \text{ m/s}$. Berechnet man den Fehler als statistische Streuung, beträgt $\pm 2,79 \text{ m/s}$, nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ergibt sich $3,13 \text{ m/s}$. Bei einer Zahl von 18 Messwerten ist die statistische Streuung noch nicht unbedingt voll aussagekräftig, es sollte daher der größere Fehler angenommen werden.

Die graphische Auswertung ergibt die Schallgeschwindigkeit als Steigung $\frac{138 \cdot 10^{-2}}{3,85 \cdot 10^{-3}} \text{ m/s}$
 $= 358,44 \text{ m/s}$ mit einem Fehler $\pm \left| \frac{134 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{3,60 \cdot 10^{-3} \text{ s}} - c \right|$
 $= 13,78 \text{ m/s}$

Aufgabe 2:

(tabellarische Ausw.)

Der Lautsprecher ist als geschlossenes Ende der Röhre zu betrachten

Bei der geschlossenen Röhre wird daher c berechnet als $c = \frac{2 \cdot v \cdot l}{n}$

Der durchschnittliche Wert ist $343,10 \text{ m/s}$ mit einem Fehler von $\pm 0,78 \text{ m/s}$ (statistisch) bzw. $\pm 0,41 \text{ m/s}$ (Fehlerfortpflanzung)

Beim Messen der Frequenz wurde dabei ein geschätzter Fehler von $\pm 3 \text{ Hz}$ angesetzt, der den Gerätefehler von einem Digit und die Ungenauigkeit

bei der Feststellung eines Resonanzmaximums
zusammenfasst.

Die graphische Auswertung ergibt eine Schall-
geschwindigkeit von $\frac{4400}{12,8} \text{ m/s} = 343,75 \text{ m/s}$

Die Fehlerbalken sind dabei zu klein für eine
sinnvolle Auswertung und wurden daher vernach-
lässigt

Bei der offenen Röhre wird die Schallgeschw
berechnet als $c = \frac{2 \cdot v \cdot l}{(n - \frac{1}{2})}$. Der durchschnittliche
Wert ist dabei $339,35 \text{ m/s} \pm 2,21 \text{ m/s}$ (bzw $\pm 0,49 \text{ m/s}$)

Da in diesem Fall der statistische Fehler größer ist,
wird dieser Wert auch als Fehler angenommen.

Die graphische Auswertung ergibt $c = \frac{4400}{13} \text{ m/s}$
 $= 338,46 \text{ m/s}$

~~Aus der jeweiligen Schallg~~

Bildet man den Durchschnitt aus den beiden Werten
für das offene und das geschlossene Rohr, erhält
man $c = (341,13 \pm 2,25) \text{ m/s}$

Aus der jeweiligen Schallgeschwindigkeit lässt
sich dann der Adiabatenexponent als
 $\kappa = \frac{c^2}{R_{sp} \cdot T}$ bestimmen. Die Daten ergeben
die Werte

$$\kappa = 1,39 \pm 0,06 \quad \text{bei der geschl. Röhre}$$

$$\kappa = 1,36 \pm 0,06 \quad \text{bei der offenen Röhre}$$

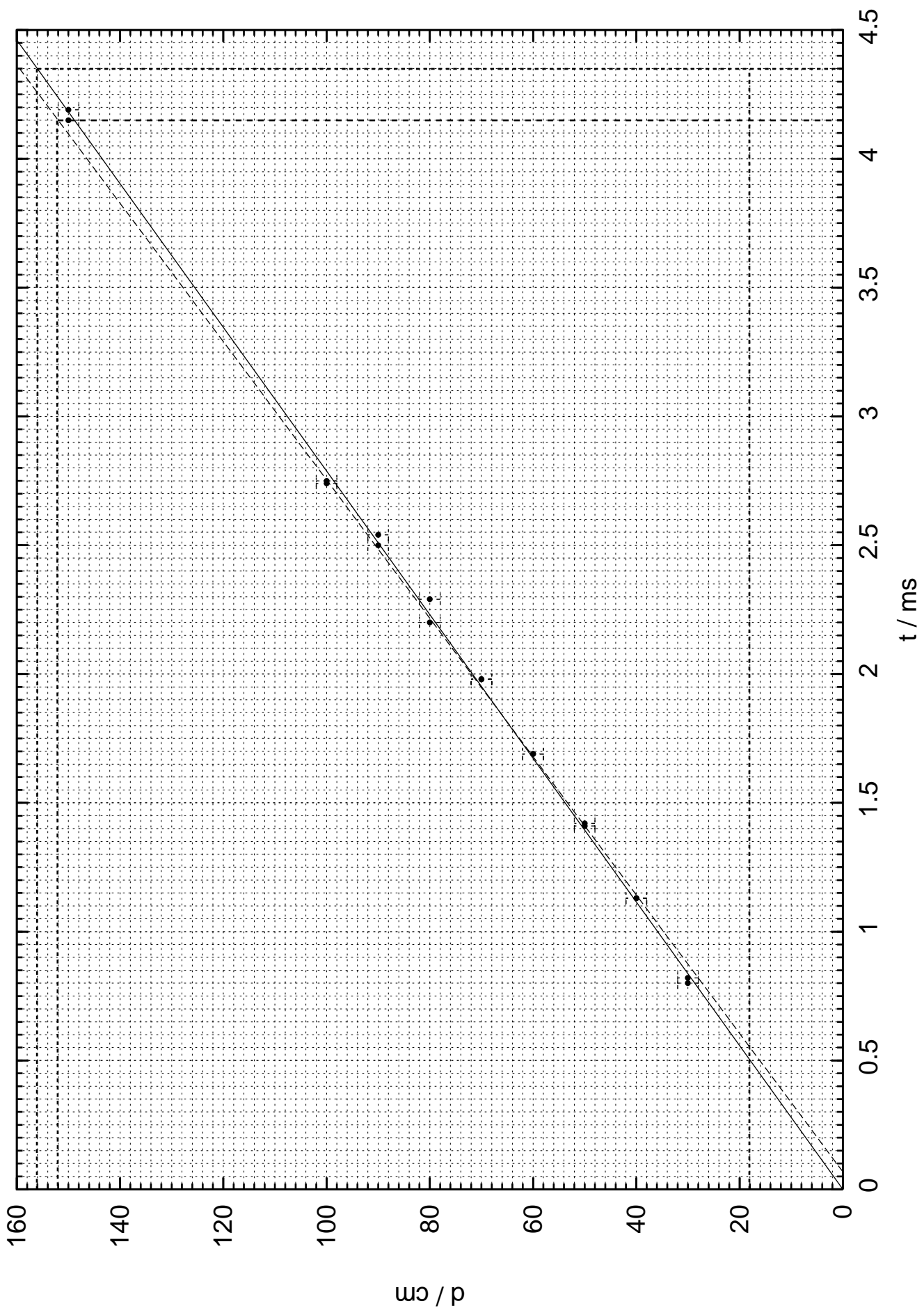
$$\text{Durchschnitt: } \kappa = 1,38 \pm 0,09$$

Zu Aufgabe 1 - Bestimmung der Schallgeschwindigkeit aus direkter Laufzeitmessung

Abstand (cm)	Fehler	Laufzeit (ms)	Geschw. (m/s)	Fehler	quadr. Fehler	quadr. Abw.	Abw.
30	2	0.8	375	25	625	281.45	
30	2	0.82	365.85	24.39	594.88	58.22	
40	2	1.13	353.98	17.7	313.26	17.99	
40	2	1.13	353.98	17.7	313.26	17.99	
50	2	1.42	352.11	14.08	198.37	37.34	
50	2	1.41	354.61	14.18	201.2	13.06	
60	2	1.69	355.03	11.83	140.05	10.2	
60	2	1.69	355.03	11.83	140.05	10.2	
70	2	1.98	353.54	10.1	102.03	21.98	
70	2	1.98	353.54	10.1	102.03	21.98	
80	2	2.2	363.64	9.09	82.64	29.3	
80	2	2.29	349.34	8.73	76.28	78.83	
90	2	2.54	354.33	7.87	62	15.15	
90	2	2.5	360	8	64	3.16	
100	2	2.75	363.64	7.27	52.89	29.3	
100	2	2.74	364.96	7.3	53.28	45.43	
150	2	4.15	361.45	4.82	23.23	10.38	
150	2	4.19	358	4.77	22.78	0.05	

Durchschnitt: Fehler (stat.): Fehler (fortpfl.):
 358.22 2.29 3.13

Raumtemperatur (°C): 22 Fehler: 1
 erwartete Schallgeschwindigkeit: 344.59 Fehler: 0.58



Zu Aufgabe 2 - Bestimmung der Schallgeschwindigkeit aus den Resonanzfrequenzen der geschlossenen Röhre

Ord	Frequ. (Hz)	Fehler	L. d. Röhre (m)	Fehler	Geschw. (m/s)	Fehler	quadr. Fehler	quadr. Abw.
1	191	3	1.0180	0.003	388.88	6.21	38.62	2095.03 *
2	344	3	1.0180	0.003	350.19	3.22	10.39	50.23
3	506	3	1.0180	0.003	343.41	2.27	5.17	0.09
4	673	3	1.0180	0.003	342.56	1.83	3.35	0.3
5	838	3	1.0180	0.003	341.23	1.58	2.50	3.5
6	1009	3	1.0180	0.003	342.39	1.43	2.05	0.51
7	1179	3	1.0180	0.003	342.92	1.34	1.78	0.03
8	1349	3	1.0180	0.003	343.32	1.27	1.61	0.05
9	1517	3	1.0180	0.003	343.18	1.22	1.48	0.01
10	1684	3	1.0180	0.003	342.86	1.18	1.39	0.06
11	1850	3	1.0180	0.003	342.42	1.15	1.33	0.47
12	2020	3	1.0180	0.003	342.73	1.13	1.28	0.14
13	2189	3	1.0180	0.003	342.83	1.11	1.24	0.07
14	2352	3	1.0180	0.003	342.05	1.10	1.21	1.12
15	2521	3	1.0180	0.003	342.18	1.09	1.18	0.85
16	2690	3	1.0180	0.003	342.30	1.08	1.16	0.64

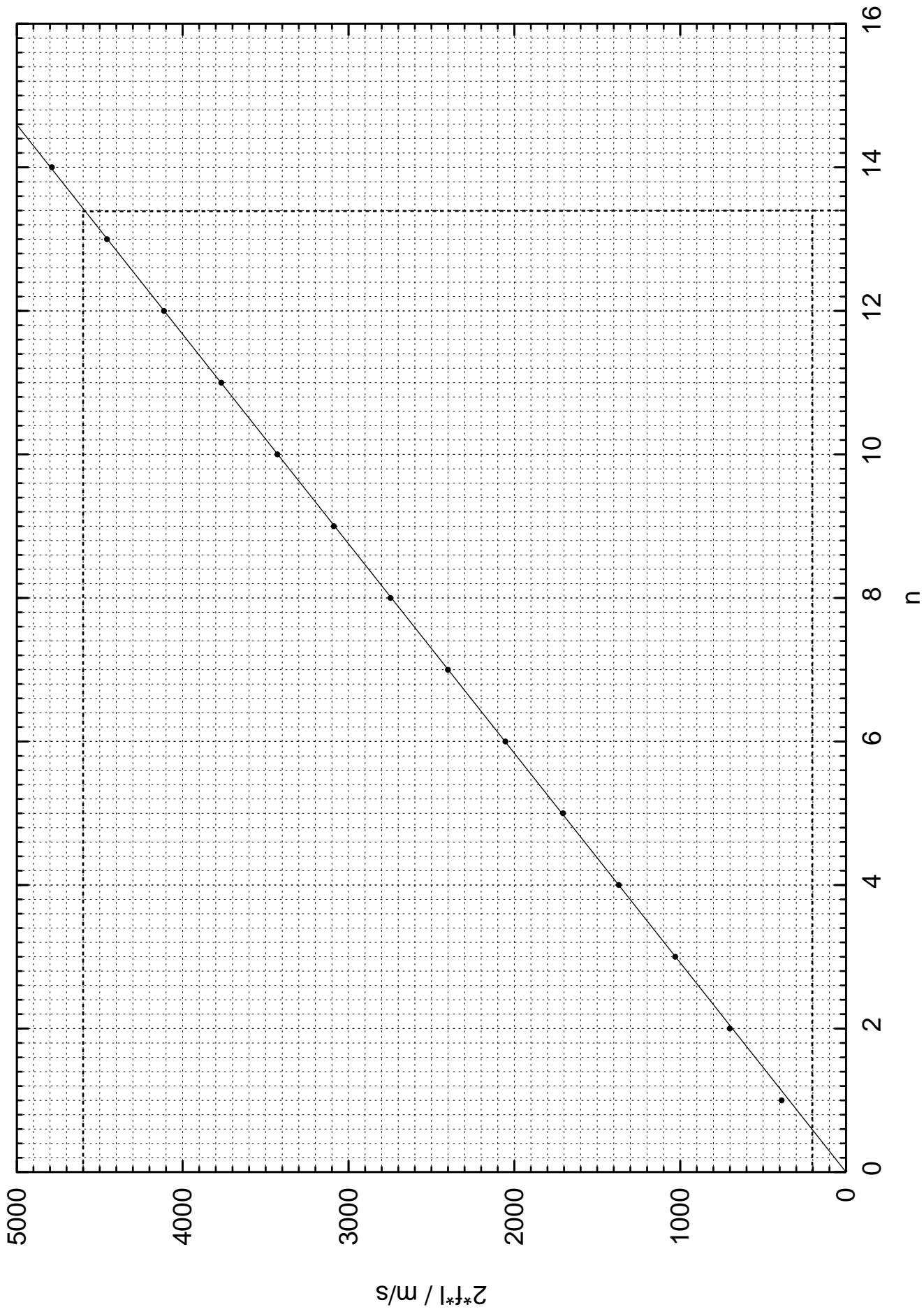
Durchschnitt: Fehler (stat.): Fehler (fortpfl.)
 343.10 0.28 0.41

Raumtemp. (°C): 22 Fehler: 1
 erw. Schallgeschw. (m/s): 344.59 Fehler: 0.58

Gaskonstante für Luft: 287.05 J/(kg K)
 erw. Adiabatenexponent: 1.40
 berech. Adiabatenexp.: 1.39 Fehler: 0.06

Zu Aufgabe 2 - Daten für Plot bei geschlossener Röhre

Ord	Frequ. (Hz)	Fehler	L. d. Roehre (m)	Fehler	$2*f \cdot l$	Fehler
1	191	3	1.0180	0.003	388.88	6.21
2	344	3	1.0180	0.003	700.38	6.45
3	506	3	1.0180	0.003	1030.22	6.82
4	673	3	1.0180	0.003	1370.23	7.32
5	838	3	1.0180	0.003	1706.17	7.91
6	1009	3	1.0180	0.003	2054.32	8.60
7	1179	3	1.0180	0.003	2400.44	9.35
8	1349	3	1.0180	0.003	2746.56	10.14
9	1517	3	1.0180	0.003	3088.61	10.96
10	1684	3	1.0180	0.003	3428.62	11.81
11	1850	3	1.0180	0.003	3766.60	12.67
12	2020	3	1.0180	0.003	4112.72	13.57
13	2189	3	1.0180	0.003	4456.80	14.48
14	2352	3	1.0180	0.003	4788.67	15.38
15	2521	3	1.0180	0.003	5132.76	16.31
16	2690	3	1.0180	0.003	5476.84	17.26



Zu Aufgabe 2 - Bestimmung der Schallgeschwindigkeit aus den Resonanzfrequenzen der offenen Röhre

Ord	Frequ. (Hz)	Fehler	L. d. Röhre (m)	Fehler	Geschw. (m/s)	Fehler	quad. Fehler	quadr. Fehler	quadr. Abw.
1	122	3	1.018	0.003	496.78	12.30	151.37	24784.79*	
2	265	3	1.018	0.003	359.69	4.21	17.70	413.76	
3	418	3	1.018	0.003	340.42	2.64	6.98	1.14	
4	579	3	1.018	0.003	336.81	2.01	4.03	6.45	
5	750	3	1.018	0.003	339.33	1.69	2.84	0	
6	908	3	1.018	0.003	336.13	1.49	2.21	10.41	
7	1078	3	1.018	0.003	337.66	1.37	1.87	2.85	
8	1244	3	1.018	0.003	337.7	1.29	1.65	2.71	
9	1412	3	1.018	0.003	338.22	1.23	1.51	1.29	
10	1576	3	1.018	0.003	337.76	1.18	1.40	2.53	
11	1743	3	1.018	0.003	337.98	1.15	1.33	1.89	
12	1910	3	1.018	0.003	338.15	1.13	1.28	1.44	
13	2078	3	1.018	0.003	338.46	1.11	1.23	0.79	
14	2230	3	1.018	0.003	336.32	1.09	1.19	9.21	
15	2395	3	1.018	0.003	336.29	1.08	1.16	9.37	

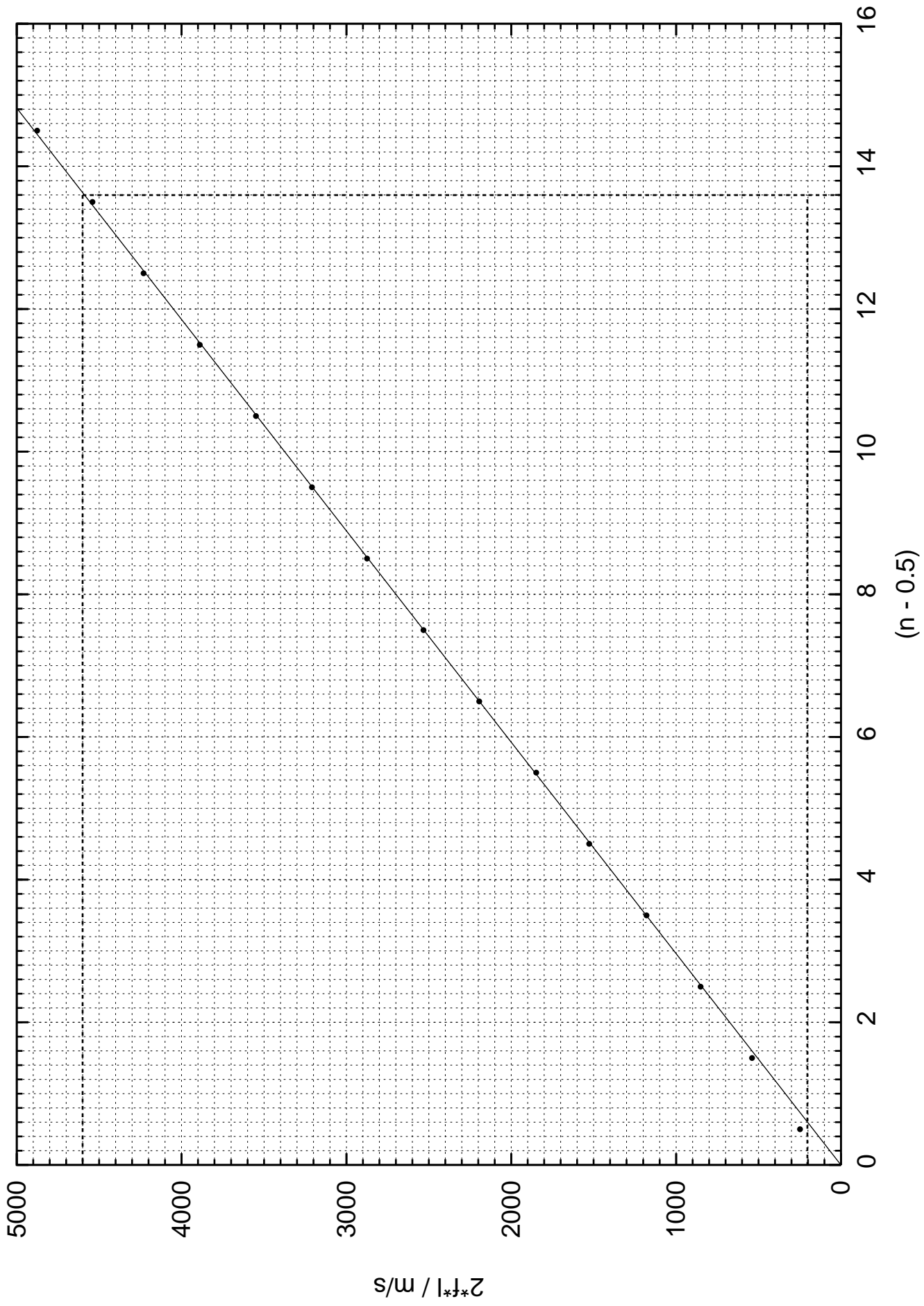
Durchschnitt: 339.35
 Fehler (stat.): Fehler (fortpfl.) 2.21 0.49

Raumtemp. (°C): 22 Fehler: 1
 erw. Schallgeschw.: 344.59 Fehler: 0.58

Gaskonstante für Luft: 287.05 J/(kg K)
 erw. Adiabatenexponent: 1.40
 berech. Adiabatenexp.: 1.36 Fehler: 0.06

Zu Aufgabe 2 - Daten für Plot bei offener Röhre

Ord	Frequ. (Hz)	Fehler	L. d. Roehre (m)	Fehler	$2 \cdot f \cdot l$	Fehler
1	122	3	1.018	0.003	248.39	6.15
2	265	3	1.018	0.003	539.54	6.31
3	418	3	1.018	0.003	851.05	6.60
4	579	3	1.018	0.003	1178.84	7.03
5	750	3	1.018	0.003	1527.00	7.59
6	908	3	1.018	0.003	1848.69	8.18
7	1078	3	1.018	0.003	2194.81	8.90
8	1244	3	1.018	0.003	2532.78	9.64
9	1412	3	1.018	0.003	2874.83	10.44
10	1576	3	1.018	0.003	3208.74	11.26
11	1743	3	1.018	0.003	3548.75	12.11
12	1910	3	1.018	0.003	3888.76	12.99
13	2078	3	1.018	0.003	4230.81	13.88
14	2230	3	1.018	0.003	4540.28	14.71
15	2395	3	1.018	0.003	4876.22	15.61



Aufgabe 3.

In der Anfangsphase kann die Schallgeschwindigkeit abgelesen werden aus der Periodizität der Schwingung. Der Ton wird jeweils an den Enden reflektiert und muss daher in einer Periode zweimal den Stab entlanglaufen. Der Graph zeigt 5 Perioden in dem Zeitraum von $2,78 \text{ ms}$, daraus ergibt sich (unter Berücksichtigung des Fehlers bei der Länge des Stabes) eine Schallgeschwindigkeit von $(5035,97 \pm 10,80) \text{ m/s}$. Dieses Ergebnis bezieht sich auf beide Einspannungen. Leider waren keine exakten Literaturwerte verfügbar, die Suche im Internet lieferte unterschiedliche Werte zwischen 4900 und 5050 m/s .

In der Endphase lässt sich die Schallgeschwindigkeit zudem wie in Aufg. 2 aus der Resonanzschwingung berechnen. Durch die unterschiedliche Einspannung wurde erzwungen, dass bei dem mittig eingespannten Stab die Resonanzschwingung 1. Ordnung, bei dem zweifach eingespannten Stab die Resonanzschwingung 2. Ordnung auftrat. Nach der Formel $c = 2 \cdot v \cdot l / n$ ergibt sich in beiden Fällen die Schallgeschwindigkeit $(5035,97 \pm 10,80) \text{ m/s}$, also eine exakte Übereinstimmung mit der Messung aus der Anfangsphase.

Mit bekannter Schallgeschwindigkeit lässt sich dann das Elastizitätsmodul von Stahl als $E = c^2 \cdot \rho$ berechnen. Man erhält mit $\rho = (7,5 \pm 0,3) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
 $E = (1,90 \pm 0,08) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$
Gefundene Literaturwerte waren zwischen $1,78 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$
und $2,16 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$

Zusammenfassung und Diskussion

In diesem Versuch wurde die Schallgeschwindigkeit in Luft und Stahl mit verschiedenen Methoden unterschiedlicher Genauigkeit gemessen.

Die direkte Messung der Laufzeit ist dabei am ungenauesten, der Wert unterscheidet sich signifikant vom Literaturwert. Es ist hier zudem von systematischen Fehlern auszugehen, die in Verbindung stehen mit der Verkabelung der Klatsche; in einer ersten (verworfenen) Messreihe waren die Ergebnisse zwar in sich konsistent, aber bei weitem zu hoch (ca. 500 m/s).

Die anderen Messverfahren zeigen sich als geeigneter. Hier wurden mindestens verträgliche Werte erzielt.

Allerdings gestaltet sich der Messung der Resonanzfrequenz in der Röhre die Fehlerauswertung recht schwierig, rechnerisch ergeben sich überraschend kleine Fehlerwerte, deren Aussage eher kritisch zu beurteilen ist. Die graphische Auswertung lässt kaum eine

1) Allerdings ist bei der graphischen Auswertung der Fehler groß genug, um die Messung verträglich zu machen.

Sinnvolle Fehlerbehandlung zu.

Die Messung mit dem Computer zeigt sich als äußerst exakt (zumindest in sich konsistent)

Ein genauer Vergleich mit Literaturwerten war leider nicht möglich. Die Messwerte liegen aber voll im erwarteten Bereich.