

# Bericht zum Versuch Induktion

Anton Haase, Michael Goerz

12. September 2005

GP II

Tutor: W. Theis

## 1 Einführung

Das Faraday'sche Induktionsgesetz gibt die durch einen zeitlich veränderlichen magnetischen Fluss induzierte Spannung in einer Leiterschleife an. Es gilt

$$U_{\text{ind}} = \frac{d\phi}{dt}, \quad (1)$$

wobei der magnetische Fluss als

$$\phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (2)$$

definiert ist. Die Richtung des Flächenelements  $d\vec{A}$  wird durch den Flächennormalenvektor gegeben. Die induzierte Spannung erreicht ihren Maximalwert dementsprechend für ein senkrecht auf die Fläche wirkendes Magnetfeld (Feldlinien parallel zum Vektor  $d\vec{A}$ ). Für den Fall einer zeitlich unveränderlichen Fläche mit dazu senkrechtem, räumlich konstantem Magnetfeld ergibt sich für die Induktionsspannung in der Leiterschleife der einfache Zusammenhang

$$U_{\text{ind}} = \dot{B} A \quad (3)$$

Erhöht sich die Zahl der Leiterschleifen (Windungen) wie bei einer Spule, so muss die rechte Seite der Formel noch mit der Anzahl der Windungen  $n$  multipliziert werden.

Die magnetische Felddichte  $\vec{B}$ , oft auch magnetische Feldstärke genannt, lässt sich ihrerseits über den Zusammenhang

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \quad (4)$$

durch die magnetische Erregung  $\vec{H}$  ausdrücken. Da es sich bei der Feldstärke im Gegensatz zur magnetischen Erregung um eine materialabhängige Größe handelt, kommt die einheitenlose Permeabilität  $\mu$  als zusätzlicher Faktor in die Gleichung hinein. Im Vakuum beträgt dieser Faktor  $\mu = 1$ . Für Luft gilt in guter Näherung der gleiche Wert. Bei Eisenkernen sind Permeabilitäten in der Größenordnung  $\mu = 400$  häufig, da dort das Magnetfeld bei gleicher Erregung erheblich dichter ist. Der Faktor  $\mu_0$  wird als Permeabilitätskonstante bezeichnet.

Das oben genannte Induktionsgesetz findet nicht nur bei äußerer Einwirkung eines Magnetfeldes auf einen Leiter Anwendung, sondern auch für den Fall eines selbsterzeugten Feldes. Die Stärke der sog. Selbstinduktion wird durch den Proportionalitätsfaktor  $L$  (Induktivität) angegeben. Es gilt der Zusammenhang

$$U_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt}, \quad (5)$$

wobei die induzierte Spannung gemäß der Lenz'schen Regel immer ihrer Ursache entgegenwirkt („Lenz'sches Minus“). Als konkretes Beispiel für diese Beobachtung betrachten wir eine Spule, welche an eine Rechteckspannung angelegt ist. Die Induktivität wird mit  $L$  bezeichnet, der Ohm'sche Widerstand mit  $R_L$ . Die angelegte Generatorspannung nennen wir  $U_G$  mit dem dazugehörigen Innenwiderstand  $R_i$ . Die Kirchhoff'sche Maschenregel liefert uns eine Differentialgleichung für den Strom  $I$ :

$$\begin{aligned} R_L I + R_i I + L \dot{I} &= U_G \\ \Rightarrow \dot{I} + \frac{R_L + R_i}{L} I &= \frac{U_G}{L} \end{aligned} \quad (6)$$

Der Ansatz

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R_L + R_i}{L} t} \quad (7)$$

stellt zunächst eine Lösung für die homogene Gleichung dar. Die inhomogene Lösung lässt sich allein durch scharfes Hinsehen leicht erraten. Ein zusätzlicher Term, welcher bei der Ableitung nach der Zeit verschwindet liefert das gewünschte Ergebnis:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R_L + R_i}{L} t} + \frac{U_G}{R_L + R_i} \quad (8)$$

Somit ergibt sich für den Strom  $I$  im Grenzfall  $t \rightarrow \infty$  die Formel:

$$I(t \rightarrow \infty) = \frac{U_G}{R_L + R_i} \quad (9)$$

Unter der Voraussetzung, dass zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine Umschaltung von  $-U_G$  nach  $+U_G$  stattfindet, kann die Amplitude  $I_0$  bestimmt werden. Es muss gelten:

$$I(0) = -\frac{U_G}{R_L + R_i} \quad (10)$$

Um dies zu erreichen, folgt für die Amplitude:

$$I_0 = -2 \frac{U_G}{R_L + R_i} \quad (11)$$

Daraus ergibt sich als vollständige Lösung für die Differentialgleichung schließlich:

$$I(t) = \frac{U_G}{R_L + R_i} \left( 1 - 2 e^{-\frac{R_L + R_i}{L} t} \right) \quad (12)$$

Möchte man die Wirkung des Magnetfeldes einer Spule an einer Rechteckspannung auf eine andere Spule beschreiben, so erfolgt dies ebenfalls unter Anwendung des Faraday'schen Induktionsgesetzes. Zu diesem Zweck muss lediglich die Fläche der Induktionsspule, sowie das wirkende Magnetfeld bekannt

sein. Letzteres ergibt sich natürlich aus den Daten der Feldspule. Dabei ist zu beachten, dass das Magnetfeld innerhalb dieser Spule keinesfalls konstant ist. Um dieses Problem zu umgehen wird ein mittleres Magnetfeld  $\bar{B}(s)$  eingeführt, wobei  $s$  die Länge der Induktionsspule angibt:

$$\bar{B}(s) = \mu_0 \cdot \frac{n}{l} \cdot I(t) \cdot \bar{F}(s) \quad (13)$$

Der Korrekturfaktor  $\bar{F}(s)$  ist wie folgt definiert:

$$\bar{F}(s) = \frac{1}{s} \int_{\frac{l-s}{2}}^{\frac{l+s}{2}} \left( \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} + \frac{l-a}{\sqrt{r^2 + (l-a)^2}} \right] \right) da \quad (14)$$

Somit folgt für die induzierte Spannung in der Induktionsspule durch Einsetzen in das Faraday'sche Induktionsgesetz:

$$U_{\text{ind}} = 2 \cdot n_I \cdot \mu_0 \frac{n_F}{l} \cdot \frac{U_G}{L_F} \cdot e^{-\frac{R_L + R_i}{L_F} t} \cdot \bar{F}(s) \cdot A_I \quad (15)$$

Legt man statt der Rechteckspannung eine herkömmliche Sinusspannung an, so lautet die Gleichung für den Strom:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t) \quad (16)$$

Damit folgt für die induzierte Spannung in völliger Analogie zu oben:

$$U_{\text{ind}} = n_I \cdot \mu_0 \frac{n_F}{l} \cdot \omega \cdot I_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot \bar{F}(s) \cdot A_I \quad (17)$$

Wird die Induktionsspule schließlich noch gegenüber den Magnetfeldlinien um den Winkel  $\phi$  verkippt, so wird die Durchflussfläche  $A_I$  nur anteilig berücksichtigt:

$$U_{\text{ind}} = n_I \cdot \mu_0 \frac{n_F}{l} \cdot \omega \cdot I_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot \bar{F}(s) \cdot A_I \cdot \cos(\phi) \quad (18)$$

## 2 Aufgaben

1. Untersuchung der Induktionsspannung in Abhängigkeit von der Zeit an einer Probespule (Induktionsspule) innerhalb einer Magnetspule (Feldspule) bei Anlegen einer Rechteckspannung an die Feldspule. Berechnung der induzierten Spannung für  $t = 0$  und des Selbstinduktionskoeffizienten der Feldspule. Vergleich der Ergebnisse mit den theoretischen Erwartungen.
2. Messung der Induktionsspannung (Effektivwert) an der Induktionsspule bei einem Wechselstrom durch die Feldspule in Abhängigkeit von Frequenz des Feldstroms. Qualitativer und quantitativer Vergleich des Ergebnisses mit der theoretischen Erwartung.
3. Messung der Induktionsspannung (Effektivwert) an der Induktionsspule bei einem Wechselstrom durch die Feldspule in Abhängigkeit von der Orientierung der Induktionsspule bei einer Frequenz von 100 Hz. Zusätzliche Messung der Induktionsspannung bei einer Frequenz von 1000 Hz bei der Winkelstellung  $0^\circ$ . Qualitativer und quantitativer Vergleich der Ergebnisse mit den theoretischen Erwartungen.

### 3 Auswertung

#### 3.1 Aufgabe 1

In den Messungen zur 1. Aufgabe haben wir das Abklingverhalten der an einer Probespule (Induktionsspule mit 500 Windungen) induzierten Spannung aufgenommen. Die Probespule befand sich innerhalb einer Feldspule mit 1000 Windungen, welche an eine Rechteckspannung (100 Hz) angeschlossen war. Die Kurvenverläufe zeigten auf beiden Kanälen (d.h. für Feld- und Induktionsspule) einen exponentiellen Abfall, wie es in der Abbildung im Messprotokoll dargestellt ist. Dabei waren die Spannungskurven im Vergleich zwar unterschiedlich, die Kurve der Feldspule war jedoch *nicht* wie erwartet doppelt so hoch wie die der Induktionsspule. Leider versäumten wir während der Messung die Aufnahme des Spannungs-Zeit-Verlaufs an der Feldspule, so dass eine messtechnische Bestimmung des Selbstinduktionskoeffizienten nicht möglich ist. Die theoretische Bestimmung erfolgt mittels der Gleichung

$$L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot \frac{A}{l} \cdot \bar{F}(s) \quad (19)$$

Dies ergibt nach Einsetzen der im Platzskript genannten Werte und Berechnung des Korrekturfaktors zu  $\bar{F} = 0.89$  eine Induktivität von:

$$L = (10,9 \pm 0,2) \text{ mH} \quad (20)$$

Die theoretische Bestimmung der in der Induktionsspule induzierten Spannung erfolgt anhand von Gleichung (15). Das Einsetzen der gleichen Längen von Feld- und Induktionsspule, sowie der Induktivität  $L_F$  der Feldspule ergeben eine kurze Gleichung:

$$U_{\text{ind}} = 2 \cdot \frac{n_I}{n_F} \cdot \frac{A_I}{A_F} \cdot U_G \quad (21)$$

Damit lautet der berechnete Wert für die induzierte Spannung (mit einer Generatorspannung von:  $U_G = (1,25 \pm 0,05) \text{ V}$ ):

$$U_{\text{ind}} = (1,01 \pm 0,03) \text{ V} \quad (22)$$

Die Auswertung der Messergebnisse erfolgt in diesem Fall grafisch. Zu diesem Zweck wird die Spannung über der Zeit einfachlogarithmisch aufgetragen und anschließend eine Ausgleichsgerade bestimmt. Die Anwendung der linearen Regression auf dieses Problem liefert als extrapolierten Wert der induzierten Spannung (siehe Abb. 1) zum Zeitpunkt  $t = 0$ :

$$U_{\text{ind}} = (1,01 \pm 0,02) \text{ V} \quad (23)$$

Im Vergleich sind theoretischer und experimenteller Wert identisch.

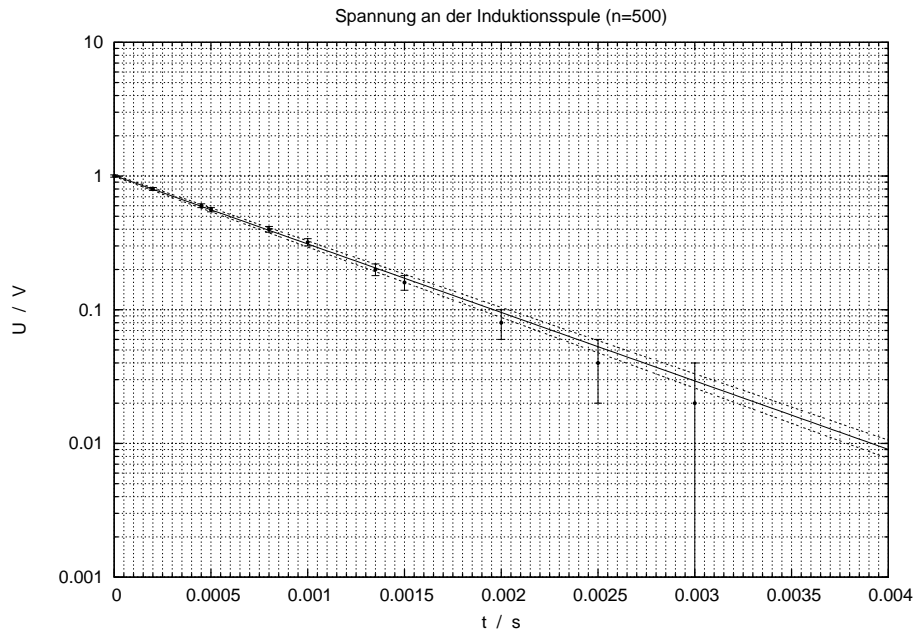


Abb. 1: Spannungs-Zeit-Messreihe an der Induktionsspule

### 3.2 Aufgabe 2

Gemessen wurde die induzierte Spannung in einer Induktionsspule in Abhängigkeit von der Frequenz der an einer Feldspule angelegten Sinusspannung. Gemäß der Gleichung (17) aus der Einleitung ist auf Grund der Proportionalität zu  $\omega$  bei konstantem Strom  $I_0$  ein linearer Zusammenhang zu erwarten. Den theoretischen Wert für den gesuchten Proportionalitätsfaktor erhält man folglich durch einsetzen der gegebenen bzw. gemessenen Größen in die Effektivwertgleichung. Diese ergibt sich direkt aus Gleichung (17):

$$U_{\text{ind, eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot n_I \cdot \mu_0 \frac{n_F}{l} \cdot 2\pi f \cdot I_0 \cdot \overline{F}(s) \cdot A_I \quad (24)$$

Als theoretischen Wert für die erwartete Gerade erhält man somit:

$$U_{\text{ind, eff}} = (0,00031 \pm 0,00004) \text{Vs} \cdot f \quad (25)$$

Die Messwerte werden wieder grafisch ausgewertet (siehe Abb. 2). Der daraus gewonnene Wert für die Steigung der Ausgleichsgeraden lautet:

$$U_{\text{ind, eff}} = (0,00041 \pm 0,00007) \text{Vs} \cdot f \quad (26)$$

Somit sind theoretischer und experimenteller Wert verträglich.

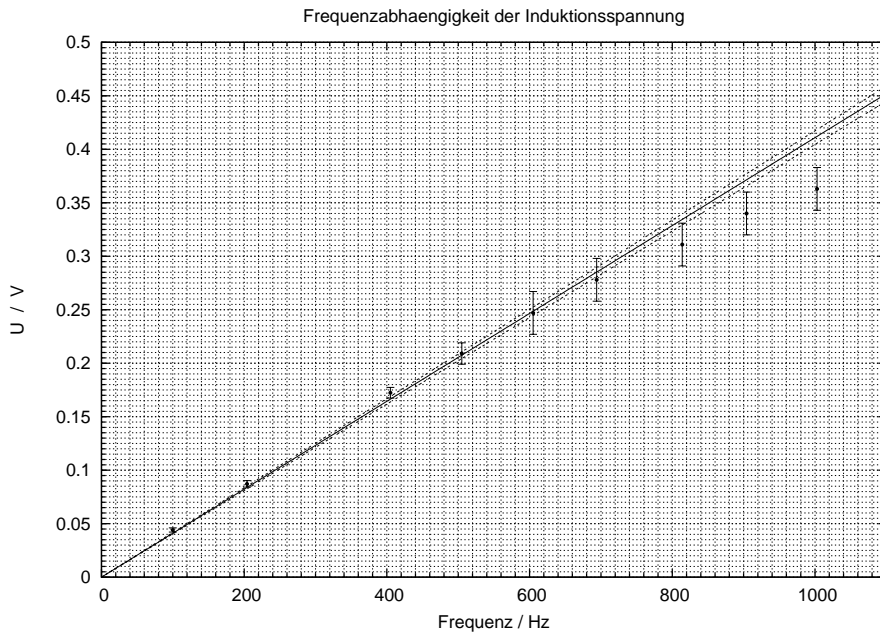


Abb. 2: Frequenz-Spannungs-Messreihe

### 3.3 Aufgabe 3

In dieser Aufgabe haben wir die Winkelabhängigkeit der induzierten Spannung untersucht. Dazu wurde eine im Winkel verstellbare Induktionsspule mit  $n = 300$  Windungen verwendet und in das Zentrum der bereits zuvor benutzten Feldspule mit  $n = 1000$  Windungen gebracht. Da das Magnetfeld dort nahezu homogen ist, ergibt sich der Korrekturfaktor in diesem Fall zu  $\bar{F}(s) = 0.99$ . Die Berechnung der theoretischen Erwartung erfolgt analog zu Aufgabe 2 aus der Gleichung (18):

$$U_{\text{ind, eff}} = n_I \cdot \mu_0 \frac{n_F}{l} \cdot 2\pi f \cdot I_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \bar{F}(s) \cdot A_I \cdot \cos(\phi) \quad (27)$$

Das Einsetzen der Werte liefert:

$$U_{\text{ind, eff}} = (0,018 \pm 0,003) \text{ V} \cdot \cos(\phi) \quad (28)$$

Die graphische Darstellung der Messwerte für die induzierte Spannung aufgetragen über dem Cosinus des Neigungswinkels liefert den gemessenen Wert für den Proportionalitätsfaktor (siehe Abb. 3):

$$U_{\text{ind, eff}} = (0,025 \pm 0,001) \text{ V} \cdot \cos(\phi) \quad (29)$$

Unter Berücksichtigung des großen Fehlerintervalls beim theoretischen Wert, sind die beiden Ergebnisse verträglich.

Für die Messung bei 1000 Hz ergibt sich bei einem Strom von  $I_0 = 15 \text{ mA}$  und einem Winkel von  $\alpha = 0^\circ$  ein theoretischer Wert von

$$U_{\text{ind}} = (0,054 \pm 0,007) \text{ V} \quad (30)$$

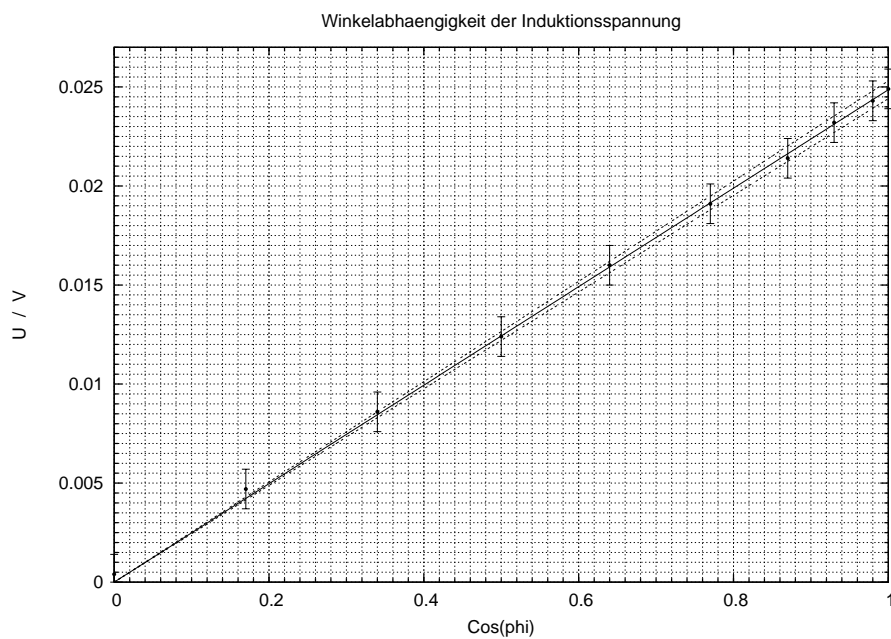


Abb. 3: Winkel-Spannungs-Messreihe

Der gemessene Wert lautet

$$U_{\text{ind}} = (0,029 \pm 0,006) \text{ V} \quad (31)$$

Die Werte sind somit signifikant unterschiedlich.

## 4 Zusammenfassung und Diskussion

Um die Messwerte sämtlicher Versuche in ihrer Genauigkeit einordnen zu können, ist zunächst eine Beurteilung der Messmethoden erforderlich. Während der Messung stellte sich heraus, dass die Position der Spulen relativ zu den Spannungs- und Strommessgeräten einen sichtbaren Einfluss auf die Messwerte hatte. Dies ist mit Sicherheit auf das magnetische Feld zurückzuführen, welches selbstverständlich auch in allen Kabeln und Leitern innerhalb der Geräte eine Spannung induziert. Die Berechnung des erzeugten Magnetfeldes als Mittelwert über die gesamte Spule stellt auch nur eine fehlerbehaftete Näherung dar und beeinflusst damit die Genauigkeit der Messung.

Das Aufnehmen von Messwerten unter Verwendung eines Oszilloskops ist ebenfalls nicht optimal. Die Skaleneinteilung lässt lediglich die Protokollierung weniger Messpunkte zu, welche unter anderem auf Grund der Strahldicke einen Fehler von mindestens einem Skalenteil aufweisen. Dennoch ist diese Messmethode geeignet, um den qualitativen Verlauf der Spannung mit der Zeit zu beobachten. Die im Messprotokoll festgehaltene Kurve entspricht genau der theoretischen Erwartung an die Induktionsspannung.

Die Beobachtung der induzierten Spannung in Abhängigkeit von der Frequenz ergab in der qualitativen und quantitativen Auswertung eine Bestätigung der theoretischen Erwartung. Die Proportionalität zwischen Spannung und Frequenz (bei konstantem Strom) wurde durch den linearen Verlauf der Messwerte verdeutlicht. Der relativ hohe Fehler erklärt sich durch die große Anzahl fehlerbehafteter Begleitmessungen, wie zum Beispiel der Strom- und Frequenzmessung.

Für die Messung der Winkelabhängigkeit der Induktionsspannung gelten ähnliche Bedingungen. Der Fehler der Frequenzmessung konnte hier jedoch gegenüber der anderen Fehler vernachlässigt werden. In diesem Fall liefert die Berechnung des theoretischen Werts den größeren Fehler, da bei der Bestimmung viele fehlerbehaftete Größen eingehen. Der qualitative Verlauf unserer Messkurve (aufgetragen über dem Cosinus des Winkels) ist linear, wobei die Streuung um die Ausgleichsgerade sehr gering ist. Dies deutet darauf hin, dass die Messung und die Winkeleinstellungen sehr genau waren.