Beispiele zur Erstellung von einfachen Java-Programmen

Der Quellcode eines einfachen Java-Programms besteht aus einer Datei mit dem Suffix `.java`. In einer solchen Datei wird eine Klasse gleichen Namens definiert. Als Standardbeispiel dient die folgende Datei HalloWelt1.java

```
/* Langer Kommentar ueber mehrere Zeilen:
   HalloWelt1.java
   Ole Schulz-Trieglaff
   Dies ist ein ziemlich sinnfreies Programm.
*/
public class HalloWelt1 { // Kurzkommentar: Beginn der Klassendefinition

        public static void main(String[] args) { // Methode main
                System.out.print("Ich: Hallo ");
                System.out.println("Welt !!");
                System.out.println();
                System.out.println("Welt: Hallo Du!!");
                System.out.println();
                hallo();
        }

        public static void hallo() { // Methode hallo
          System.out.println("Ich: Wie geht es Dir?");
        }

}      //Ende der Klassendefinition
```

Mit dem Befehl `javac HalloWelt1.java` wird die Datei HalloWelt1.class erzeugt, welche mit dem virtuellen Prozessor JVM auf jeder Plattform ausgeführt (genauer interpretiert) werden kann. Das geschieht durch den Aufruf `java HalloWelt1`. Dabei ist wichtig, dass die Datei eine Methode `main` mit der oben beschriebenen Signatur besitzt. In unserem Beispiel wird in der Methode `main` die Methode `hallo` aufgerufen. Dieser prozedurale Aufbau ist ein äußerst wichtiger Aspekt bei der Erstellung von komplexen Programmen, hier hätte man an Stelle der Anweisung `hallo();` in `main` auch die Codezeile aus der Definition von `hallo()` schreiben können.
Das folgende Beispiel zeigt, wie man Eingaben in der Kommandozeile übergeben kann, nämlich als Zeichenfolgen (Strings), die als Argumente im Aufruf nach dem Klassennamen folgen. Die Eingabeparameter sind durch (ein oder mehrere) Leerzeichen voneinander getrennt. Die Anzahl dieser Parameter kann man durch `args.length` abfragen. In unserem Beispiel werden sie als Strings übernommen (mit einer for-Schleife), konkateniert (mit jeweils einem Leerzeichen als Zwischenraum) und am Ende wieder ausgegeben. Der Aufruf `java Echo Bla bla bla` würde also die Ausgabe `Bla bla bla` erzeugen.

```
public class Echo {
        public static void main(String[] args) {
                String echo;  // Deklaration der Variablen echo
                echo = "";    // Initialisierung der Variablen echo
                for (int i=0;i<args.length;i++) {
                        echo = echo +  args[i] + " ";
                }
                System.out.println(echo);
        }
}
```

Für die Übernahme von Zahlen als Eingabeparameter verwendet man spezielle Methoden aus einer Bibliothek. Natürlich muss man dabei den Typ des Eingabeparameters angeben. Das Beispielprogramm berechnet $n!$, d.h. der Eingabeparameter n ist von Typ `int`. Hier wird in der Methode `main` nur die Ein-Ausgabe vorgenommen und die Methode `fakultaet` aufgerufen, in der die Berechnung von $n!$ durch rekursiven Aufruf erfolgt. Man könnte $n!$ natürlich auch mit einer Schleife berechnen.

```
public class Fakultaet {

        public static void main(String[] args) {

                int n;
                n = Integer.parseInt(args[0]);

                System.out.println("Berechne " + n + "!");
                int fakult = fakultaet(n);    // Berechne die Fakultaet
                System.out.println(fakult);

        }

        // Rekursive Funktionen in Java
        public static int fakultaet(int n) {

                if (n==1) {
                        return 1;
                } else {
                        return n * fakultaet(n-1);
                }

        }

}
```

Das folgende Beispiel zeigt, dass man auch mehrere Parameter von verschiedenen Typen übergeben kann. Darüber hinaus wird demonstriert, wie eine for-Schleife durch eine while-Schleife ersetzt werden kann.

```
public class Exponential {

        public static void main(String[] args) {

                float basis = Float.parseFloat(args[0]);
                int exponent  = Integer.parseInt(args[1]);

                if (exponent < 0) {
                        System.out.println("Ungueltige Eingabe !");
                        System.exit(0);
                }
                float ergebnis = 1;
                System.out.print(basis + " hoch " + exponent + " ergibt: ");

                /*
                for (int i=0; i<exponent; i++) {
                        ergebnis = ergebnis * basis;
                }*/

                while(exponent > 0) {
                        ergebnis *= basis;
                        exponent--;
                }
                System.out.println(ergebnis);
        }
}
```

Das letzte Beispiel zeigt die Verwendung einer switch-Anweisung. Ziel ist es, jeder Zahl den richtigen Wochentag zuzuordnen, wenn man die Zählung der Tage an einem Montag mit Null beginnt. Switch-Anweisungen dienen zur Fallunterscheidung bezüglich der Werte, die eine bestimmte Variable (hier `rest`) annehmen kann. Die einzelnen Fälle weden mit `case` aufgeführt. Mit `default` werden alle noch nicht behandelten Fälle bezeichnet (ähnlich wie otherwise in Haskell). Die `break;`-Anweisungen am Ende jedes Falls dienen dazu, die Fallunterscheidung vorzeitig zu beenden.

```
public class Wochentag {

        public static void main(String[] args) {

                int nummer = Integer.parseInt(args[0]);
                int rest = nummer % 7;  // '%' ist die Modulo-Funktion
                String wochentag = "";

                switch(rest) {

                        case 0:
                          wochentag = "Montag";
                          break;

                        case 1:
                          wochentag = "Dienstag";
                          break;

                        case 2:
                          wochentag = "Mittwoch";
                          break;

                        case 3:
                          wochentag = "Donnerstag";
                          break;

                        case 4:
                          wochentag = "Freitag. Informatik B Zettel abgeben !";
                          break;

                        case 5:
                          wochentag = "Samstag => Wochenende !!";
                          break;

                        default :
                          wochentag = "Sonntag => Wochenende !!";
                          break;
                }
                System.out.println("Heute ist " + wochentag);

        }

}
```

Zusammenfassung

Einige Begriffe und Zusammenhänge, die an Hand der Beispielprogramme eingeführt und demostriert wurden, verdienen es, noch einmal hervorgehoben zu werden:

Variable

Jede Variable hat einen Typ, der durch eine Deklaration festgelgt werden muss. Eine Wertzuweisung kann in der Deklaration oder auch später erfolgen.
Variable sind innerhalb des kleinsten Blocks, in dem sie deklariert wurden, sichtbar. Ein Block ist eine von { } eingeschlossene Gruppe von Anweisungen. Sichtbarkeit in ihrem Block bedeutet auch Sichtbarkeit in jedem Unterblock dieses Blocks.

Bedingungen

Eine Bedingung ist ein Ausdruck, dessen Auswertung ein Boolescher Wert ist.
Die Booleschen Werte sind in Java mit `false` und `true` bezeichnet. Durch Anwendung Boolescher Operationen können zusammengesetzte Ausdrücke gebildet werden.

Kontrollstrukturen

Dieser Begriff ist eine Zusammenfassung für
- Bedingungsanweisungen (if/else),
- Auswahlanweisungen (switch),
- Schleifenanweisungen (for, while, do while) und
- Sprunganweisungen (break, continue, return).

Bedingungsanweisungen

Eine `if`-Anweisung hat die Syntax

```
if (bedingung) anweisung1;
```

und bewirkt, dass `anweisung1;` genau dann ausgeführt wird, wenn die Auswertung von `bedingung` den Wert `true` ergibt (bei `false` geht es gleich mit der nächsten Anweisung weiter). Man beachte, dass `anweisung1;` auch für einen Block von Anweisungen stehen kann (Klammern nicht vergessen!).
Eine `if/else`-Anweisung hat die Syntax

```
if (bedingung) anweisung1; else anweisung2;
```

und bewirkt, dass `anweisung1` genau dann ausgeführt wird,, wenn die Auswertung von `bedingung` den Wert `true` ergibt, bei `false` wird `anweisung2` ausgeführt. Der Unterschied wird durch die folgenden zwei Codezeilen deutlich, von denen die erste die Signumfunktion $y = sign(x)$ berechnet und die zweite die Variable x in $|x|$ verwandelt:

```
if ( x == 0 ) y = 0; else if ( x < 0 ) y = -1; else y = 1;
if ( x < 0 ) x = -x;
```

Schleifenanweisungen

Ursprünglich wurden `for`-Schleifen als reine Zählschleifen verwendet, die Syntax in Java ermöglicht eine wesentlich größere Flexibilität:

```
for (initialisierung; bedingung; modifizierung) anweisung;
```

Hier repräsentiert `anweisung;` die Schleife selbst (ist deshalb meistens ein Block). Die Anzahl der Durchläufe wird in der Regel durch eine Schleifenvariable gesteuert. Vor jedem Durchlauf wird geprüft, ob `bedingung` noch erfüllt ist, wenn nicht, erfolgt der Abbruch, sonst der nächste Durchlauf und danach die Modifizierung der Variablen.
Das Gleiche kann man mit einer `while`-Schleife realisieren. Dazu muss die Initialisierung vor der `while`-Anweisung erfolgen. Die Modifizierung ist Bestandteil der Schleife (`anweisung`) selbst. Wir haben folgende Syntax:

```
while (bedingung) anweisung;
```

In `while`-Schleifen erfolgt die Überprüng der Bedingung immer vor dem Schleifendurchlauf. Die Umkehrung dieser Reihenfolge kann durch `do-while`-Schleifen realisiert werden. Insbesondere ist bei `do-while`-Schleifen gesichert, dass mindestens ein Schleifendurchlauf gestartet wird.

Sprunganweisungen

Die Anweisung `break;` kann in einer Schleifen- oder Auswahlanweisung verwendet werden und bewirkt die sofortige Beendung dieser Anweisung. Bei geschachtelten Schleifen- und Auswahlanweisungen betrifft das immer die innerste Anweisung, zu der das `break;` gehört. Darüber hinaus kann man Blöcke mit einem Namen (Label) bezeichnen und eine `break`-Anweisung mit diesem Namen verwenden, um den Block zu beenden.

Die Anweisung `continue;` kann nur in Schleifen verwendet werden. Sie bewirkt einen Abbruch des aktuellen Durchlaufs und einen Sprung zum nächsten Durchlauf.

Mit der `return`-Anweisung erfolgt die Rückgabe des Ergebnisses einer Methode und die Beendigung des Methodenaufrufs.

Vererbung (Inheritance)

Vererbung ist ein zentraler Bestandteil der Objektorientierung. Man beschreibt damit die Möglichkeit, Eigenschaften und Methoden vorhandener Klassen auf andere (neue) Klassen zu übertragen. Leider ist die Terminologie auf den ersten Blick etwas verwirrend:
Die erbende Klasse wird **Ableitung** oder **Spezialisierung** der vererbenden Klasse genannt, aber auch **Erweiterung** oder **Unterklasse**. Für die vererbende Klasse verwendet man den Begriff **Oberklasse**. Wenn es sich um eine direkte Vererbung (ohne Zwischenklassen) handelt, sprechen wir auch von der **Superklasse** der entsprechenden Unterklasse.
Da jedes Objekt einer Unterklasse alle Eigenschaften der Oberklasse besitzt (es hat sie geerbt), kann es auch gleichzeitig als Objekt der Oberklasse betrachtet werden. Diese Vielgestaltigkeit von Objekten wird als **Polymorphie** bezeichnet und ist eine weiterer zentraler Begriff der Objektorientierung.

Um die Begriffe besser zu verstehen, kann man das folgende Standardbeispiel betrachten. Eine Klasse `Person` wird durch die Atribute Namen und Geburtsjahr charakterisiert.
Beschreibt man `Student` als eine Klasse, die alle Eigenschaften von Person erbt und dazu noch durch eine Matrikelnummer, Hauptfach und Immatrikulationsjahr charakterisiert ist, dann wird die Klasse Student aus der Klasse Person abgeleitet. Ein Student hat spezielle Eigenschaften, die nicht jede beliebige Person hat – deshalb sprechen wir von einer Spezialisierung. Gleichzeitig ist Student (im Sinne der charakterisierenden Eigenschaften) eine Erweiterung von Person, denn zu den Personeneigenschaften kommen weitere Attribute (und möglicherweise auch neue Methoden). Da jeder Student auch eine Person ist, kann man im Sinne der Mengenlehre von einer Unterklasse (Untermenge) sprechen.

Vererbung ist ein transitiver Begriff. Wenn Informatikstudent eine Unterklasse von Student ist und Student eine Unterklasse von Person , dann ist Informatikstudent auch eine Unterklasse von Person (mit Namen, Geburtsjahr und allen anderen sichtbaren Attributen und Methoden von Person). Im Gegensatz zu einigen anderen objektorientierten Programmiersprachen kennt Java keine Mehrfachvererbung, d.h. eine Klasse A kann nur eine direkte Oberklasse B haben (man nennt B die Superklasse von A), alle anderen Oberklassen von A müssen auch Oberklassen von B sein. Die Zuordnung zur Superklasse B erfolgt schon bei der Defintion von A durch `public class A extends B{....`
Wie wir aus den ersten Beispielen wissen, kann bei einer Klassendefinition auch auf den Zusatz `extends B` verzichtet werden. In diesem Fall wird die Klasse `Object` implizit als Superklasse festgelegt. Diese Klasse ist in Java die einzige, die keine Superklasse besitzt. Alle anderen Klassen bilden unter `Object` eine baumförmige Klassenhierarchie, d.h. jede Klasse A ist Unterklasse von `Object` und der aufsteigende Weg von A zu `Object` ist eindeutig.

Das folgende Beispiel demonstriert einige Aspekte, die bei der Vererbung zu beachten sind. Die Oberklasse `Rectangle` gibt eine relativ abstrakte Beschreibung eines Rechtecks nur durch seine Seitenlängen. Spezielle Rechtecke, bei denen die Lage in der Ebene eine Rolle spielt, werden durch die Unterklasse `RectangleInPlane` beschrieben.

```
public class Rectangle{
   // ************************************************************
   // * "abstraktes" Rechteck ohne konkrete Lage in der Ebene    *
   // ************************************************************

   // ************************************************************
   // * Attribute (Variablen)                                    *
   // ************************************************************
   // Zwei Seitenlaengen
   public double a,b;

   // ************************************************************
   // * Konstruktor(en)                                          *
   // ************************************************************
   public Rectangle(double a, double b){
      this.a = a;
      this.b = b;
   }

   // ************************************************************
   // * Methoden                                                 *
   // ************************************************************
   // Flaeche berechnen
   public double area(){
      return a * b;
   }

   // weitere Methoden wie z.B. Umfang berechnen ...
   //Gleichheitstest
   public boolean equals(Rectangle r){
           return((a = r.a && b = r.b) || (a = r.b && b == r.a));
   }
}
```

Bei der Erweiterung ist neben dem Zusatz `extends Rectangle` zu beachten, dass jeder Konstruktor zuerst einen Konstruktor der Superklasse aufrufen muss. Der Aufruf erfolgt aber nicht durch `Rectangle(a,b)` sondern durch `super(a,b)`. In diesem Beispiel wurde auf den einfachsten Konstruktor verzichtet, dem man einfach die 4 Eckpunkte übergibt und der daraus die Seitenlängen bestimmt (die Klasse Point wird hier in der einfachen Version verwendet, bei der die Koordinaten public sind). An Stelle dessen findet man die Beschreibung eines Konstruktors, der neben den Seitenlängen einen Eckpunkt pA und den Anstiegswinkel der Seite (pA,pB) verwendet.

```
public class RectangleInPlane extends Rectangle{
   // ***********************************************************
   // * Rechteck mit konkreter Lage in der Ebene                *
   // ***********************************************************

   // ***********************************************************
   // * Attribute (Variablen)                                   *
   // ***********************************************************
   // Seitenlaengen schon in Rectangle
   // 4 Eckpunkte (entgegen Uhrzeigerrichtung)
    Point pA, pB, pC, pD;
   // Winkel zwischen x-Achse und Grundseite im Bogenmass
   // Konvention: Seite mit Laenge a verlaeuft von pA nach pB
   double alpha;

   // ***********************************************************
   // * Konstruktor(en)                                         *
   // ***********************************************************
   // Konstruktor mit Punkt pA, Winkel und beide Seitenl\"angen gegeben
   public RectangleInPlane(Point p, double alpha, double a, double b){
      super(a,b);  // Konstruktor fuer Rectangle
      pA = p;
      pB = new Point((p.x)+Math.cos(alpha)*a, (p.y)+ Math.sin(alpha)*a);
      pD = new Point((p.x)-Math.sin(alpha)*b, (p.y)+ Math.cos(alpha)*b);
      pC = new Point((p.x) + Math.cos(alpha)*a - Math.sin(alpha)*b,
                     (p.y) +  Math.sin(alpha)*a + Math.cos(alpha)*b);
      this.alpha = alpha;
   }

   // weitere Konstruktoren denkbar, z.B. wenn pA, pB und Seite b gegeben
   // dann wird a als pA.dist(pB) berechnet

   // ***********************************************************
   // * Methoden                                                *
   // ***********************************************************
   // Mittelpunkt
   public Point center(){
        Point p = new Point(0.5*((pA.x) + (pC.x)),
                            0.5*((pA.y) + (pC.y)));
        return p;
   }
}
```

Man beachte, dass zur Gleichheit von zwei Objekten von `Rectangle` nur die Seitenlängen gleich sein müssen, bei zwei Objekten von `RectangleInPlane` auch die Lage übereinstimmen (also die Mengen der Eckpunkte). Wir verzichten hier auf die konkrete Beschreibung der Methode `equals` für `RectangleInPlane` (umfangreiche Fallbetrachtung auf Grund der möglichen Symmetrien) und kommen zum entscheidenden Punkt: In beiden Klassen gibt es eine Methode gleichen Namens und auf Grund der Polymorphie ist nicht mehr klar, welche von beiden gemeint ist, wenn sie für ein `RectangleInPlane`-Objekt aufgerufen wird. Man könnte an dieser Stelle noch argumentieren, dass die Parameterlisten verschieden sind, aber auch dort ist durch die Polymorphie keine Eindeutigkeit gegeben. Hier ist ein anderes Beispiel, bei dem selbst die Parameterlisten keine Unterscheidung erlauben: Definiert man eine Klasse `Triangle` für Dreiecke durch 3 Seitenlängen, so ist die Flächenberechnung relativ kompliziert (erfordert Winkelfunktionen oder die Wurzelfunktion). Dagegen gibt es für `TriangleInPlane` eine einfache Formel, die Fläche aus den Eckpunktkoordinaten zu berechnen. Man würde also die Methode `area()` **überschreiben**. Bleibt zu klären, wann welche Methode verwendet wird und wie man das beeinflussen kann.
Bei der Polymorphie ist es wichtig, zwischen den Typ einer Referenz (Verweis) und dem Typ des Objekts (Exemplar, Instanz) zu unterscheiden, auf das verwiesen wird. Wir erklären das an einem schematischen Beispiel von zwei Klasen A und B:

```
public class A{
    public int a;
    public A() {a = 1;} // Konstruktor
    public int meth() {return a;}
}
public class B extends A{
    public int a; // Attribut a aus A wird "beschattet", es gibt a doppelt
    public A() {
        super();
        a = 100;
    }
    public int meth() {return a;} // das ist das a aus B
}
```

Wird ein Attribut aus der Oberklasse in der Unterklasse noch einmal neu deklariert, spricht man von Beschattung, bei Methoden von Überschreibung. Diese begriffliche Trennung wird sich als wichtig erweisen. Mit den Anweisungen

```
B bref = new B();
A aref = bref; // Namen betonen, dass es um Referenzen geht
```

wird ein Objekt von Typ B angelegt, auf das zwei Referenzen verweisen: Die Referenz bref vom Typ B und die Referenz aref vom Typ A. Für die zweite Zuweisung muss der Typ von bref nicht explizit umgewandelt werden. Bei aref sind Typinformationen verloren gegangen, d.h. es ist nicht mehr ersichtlich, dass der Verweis auf ein Objekt vom Typ B zeigt. Man kann das aber mit der Bedingung `(aref instanceof B)` abfragen, die hier den

Wert true bekommt. In diesem Fall ist dann eine explizite Typumwandlung möglich:
`B cref = (B)aref; // ohne Typumwandlung --> Fehler`
Den Unterschied zwischen Beschatten und Überschreiben kann man nun in einen kurzen Merksatz fassen: Beim Beschatten (Attribute) entscheidet der Typ der Referenz, beim Überschreiben der Typ des Objekts (der Instanz). Am Beispiel bedeutet das:

```
int i;
i = bref.a;   // i hat den Wert 100
i = aref.a;   // i hat den Wert 1
i = ((A)bref).a; // explizite Typunwandlung der Referenz, i hat den Wert 1
i = ((B)aref).a; // explizite Typunwandlung der Referenz, i hat den Wert 100
i = bref.super.a;   // Syntaxfehler
i = bref.meth(); // i hat den Wert 100
i = aref.meth(); // Typ des Objekts entscheidet, i hat den Wert 100
i = ((B)aref).meth(); // nur Umwandlung des Typs der Referenz, i bleibt 100
i = ((A)bref).meth(); // nur Umwandlung des Typs der Referenz, i bleibt 100
i = bref.super.meth(); // Syntaxfehler
```

Der Grund für die Syntaxfehler liegt darin, dass die Referenz `super` auf das Objekt der Superklasse kein public-Attribut der Unterklasse ist, sondern nur wie ein private-Attribut verwendet werden kann, also nur in der Klassendefinition der Unterklasse. Aus dem gleichen Grund ist es nicht möglich `super.super` zu verwenden. Es gibt deshalb nur eine abgeschwächte Möglichkeit, auf meth() der Superklasse zuzugreifen, nämlich indem man in der Definition eine Methode
`public int super_a() {return super.meth();}`
unterbringt. Dann würde der Aufruf `i = bref.super_a();` die Methode `meth` aus A verwenden und folglich `i` mit dem Wert 1 belegen.

Das Prinzip, Methoden nicht nach dem (deklarierten) Typ der Referenz, sondern jeweils nach dem Typ des referenzierten Objekts auszuwählen, führt dazu, dass diese Entscheidung noch nicht bei der Übersetzung sondern erst zur Laufzeit getroffen werden kann. Wir sprechen deshalb von einer dynamischen Methodenauswahl (dynamic method lookup), die natürlich mehr Rechenzeit als eine statische Auswahl erfordert. Deshalb kann es sinnvoll sein, Methoden - für den Compiler eindeutig erkennbar - vor Überschreiben zu schützen. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- Verwendung des Modifikators `final`,
- Verwendung des Modifikators `private`, dann wird die Methode nicht vererbt und ist damit implizit final,
- Verwendung des Modifikators `static`, damit kann die Methode beschattet, aber nicht überschrieben werden,
- Verwendung des Modifikators `final` für die ganze Klasse.

Klassen und Objektorientierung

Die zentrale Idee der Objektorientierung besteht darin, die Trennung zwischen Daten und Operationen auf diesen Daten aufzuheben und beides in einem Objekt zusammenzufassen. Ein **Objekt** zeichnet sich durch die folgenden drei Bestandteile aus:

1. Eine **Identität** (repräsentiert durch einen Namen) zur Unterscheidung von andern Objekten;
2. Eine Menge von **Attributen** (Eigenschaften) zur Beschreibung des inneren Zustands;
3. Eine Menge von **Methoden** (dynamische Eigenschaften) zur Beschreibung des Verhaltens;

Unter einer **Klasse** verstehen wir die Zusammenfassung von Objekten mit gleichartigen Attributen und Methoden. Mit anderen Worten, eine Klassendefinition beschreibt die Attribute durch ihren Typ und die Methoden als Funktionen auf den Objekten. Zur Beschreibung eines Objekts müssen die Attribute mit Werten (bzw. Referenzen) belegt werden.
Ein Objekt einer Klasse nennt man alternativ Exemplar oder Instanz (schlechte Übersetzung von instance) der Klasse. Attribute werden auch Variablen, Datenfelder oder Member genannt. Methoden werden oft als Funktionen bezeichnet.
Während Klassen **statisch** sind, da sie schon zur Übersetzungszeit als Programmtext existieren, werden Objekte erst zur Laufzeit angelegt und sind deshalb **dynamisch**.
Das folgende Beispiel zeigt den prinzipiellen Aufbau einer Klassendefinition.

```
public class Point{

   // ************************************************************
   // * Attribute (Variablen)                                    *
   // ************************************************************
   // Punkt-Koordinaten
   public double x,y;

   // ************************************************************
   // * Konstruktor(en)                                          *
   // ************************************************************
   public Point(double a, double b){
      x = a;
      y = b;
   }

   // ************************************************************
   // Methoden                                                   *
   // ************************************************************
   // Distanz zum Nullpunkt berechnen (keine Parameter benoetigt)
```

```
   public double distFromOrigin(){
      return Math.sqrt(x*x + y*y);
   }

   // Distanz zwischen aktuellem "Klassenpunkt" und p berechnen
   public double dist(Point p){
      return Math.sqrt((p.x-x)*(p.x-x) + (p.y-y)*(p.y-y));
   }
}
```

Wie bei allen Referenztypen wird mit der Deklaration `Point p;` nur eine Referenz auf `null` und nicht das Objekt `p` selbst angelegt. Eine Instanziierung erfolgt dann z.B. durch `p = new Point(1.2, 5);`
Jede Klasse hat spezielle Methoden zur Instaziierung von Objekten, sogenannte **Konstruktoren**. Folgendes ist dabei zu beachten:

1. Alle Konstruktoren haben den gleichen Namen wie die Klasse. Für eine Klasse kann man verschiedene Konstruktoren definieren, diese müssen sich aber durch verschiedene Parameterlisten unterscheiden.

2. Konstruktoren haben keinen Rückgabetyp.

3. Gibt es keinen definierten Konstruktor, so ist implizit ein Default-Konstruktor definiert (mit leerer Parameterliste), der alle Attribute mit den Default-Werten belegt.

4. Wenn ein explizit definierter Konstruktor existiert, so gibt es keinen Default-Konstruktor.

5. Man kann für Parameter von Konstruktoren (und von anderen Methoden) auch Namen von Attributen verwenden (Beschattung). In diesem Fall muss man, wie das folgende Beispiel zeigt, die Referenz `this` auf das aktuelle Objekt verwenden, um auf die beschatteten Attribute zuzugreifen.

```
public Point(double x, double y){
       this.x = x; // linke Seite Attribut, rechts uebergebener Parameter
       this.y = y;
}
```

Für alle Attribute und alle Methoden, die kein Konstruktor sind, muss ein **Rückgabetyp** deklariert werden. Möglich sind primitive Typen, Klassen und Felder. Ist ein Objekt definiert, erfolgt der Zugriff auf seine Eigenschaften, indem man vor den Namen der Eigenschaft den Objektnamen mit einem Punkt setzt, wie z.B. `p.x` oder `p.distFromOrigin()`. Wir verwenden hier und im Folgenden Eigenschaften als Sammelbegriff für Attribute und Methoden. Durch sogenannte **Modifikatoren** kann man Einfluss auf die Sichtbarkeit (den Zugang) zu den Eigenschaften nehmen. Mit `public` deklarierte Eigenschaften sind überall sichtbar und damit verwendbar, mit `private` deklarierte Eigenschaften dagegen nur in der eigenen Klassendefinition. Damit kann man Attribute nach außen verbergen oder lesbar

machen, bei gleichzeitigem Schreibschutz. Das folgende Beispiel zeigt, wie man die Klasse `Point` ändern muss, um die Koordinaten vor Änderungen zu schützen und gleichzeitig ihre Lesbarkeit zu sichern:

```
private double x, y; // ausserhalb der Klassendefinition nicht mehr sichtbar
public double get_x(){ // Lesefunktion ist nach aussen sichtbar
         return x;
}
// get_y() analog
```

Den hier skizzierten Mechanismus nennt man **Datenkapselung**. Damit ist gemeint, dass eine Klasse aus einem Kern von privaten (also nach außen abgeschirmten) Eigenschaften und einer Hülle von öffentlichen Eigenschaften besteht, mit denen ein potenzieller Anwender auf die eigentliche Funktionalität der Klasse zugreifen kann, wärend die für ihn unwichtigen Details der Implementierung verborgen bleiben. Dieses Entwurfsprinzip für weiter- und wiederverwendbare Software nennt man **Datenabstraktion**, die Schnittstelle wird **API** (Application Programming Interface) genannt.

Zur Verfeinerung dieses Konzepts stehen weitere Modifikatoren zur Verfügung. Um sie zu verstehen, muss man wissen, dass größere Javprojekte in Paketen organisiert werden. Eine Gruppe von Klassen mit starken inhaltlichen Bezügen kann zu einem **Paket** (`package`) zusammenfassen. Mit dem Modifikator `protected` wird eine Eigenschaft im eigenen Paket und in allen Unterklassen sichtbar. Verwendet man keinen der Modifikatoren `public, protected, private`, so ist die Eigenschaft nur im eigenen Paket sichtbar.

Mit dem Modifikator `static` werden **Klassenvariablen** und **Klassenmethoden** deklariert. Auf solche Eigenschaften kann man schon zugreifen, bevor ein entsprechendes Objekt der Klasse instanziiert ist. Man kann auf solche Eigenschaften mit dem Klassennamen und einem Punkt zugreifen.

Neben den Modifikatoren muss für alle Attribute ein Typ festgelegt werden und auch für alle Methoden, die kein Konstruktor sind, muss ein Rückgabetyp deklariert werden. Bei Methoden, die nur intern etwas ändern, aber nichts zurückgeben wird der Rückgabetyp `void` verwendet.

Schnittsstellen (Interfaces)

Der Begriff Schnittstelle fiel bereits beim Thema Datenabstraktion. Allgemein bezeichnet man damit die Daten und Funktionen, die ein Programm nach aussen zur Verfügung stellt, damit ein Anwender die Software nutzen kann, ohne das Programm selbst zu ändern. Zu diesem Zweck muss der Anwender auch nicht wissen, wie eine Methode implementiert ist - er muss nur die Signatur kennen, um die Methode syntaktisch korrekt verwenden zu können. In einer Schnittstelle kann man sich also auf die abstrakte Beschreibung von Funktionen (Deklaration) beschränken und auf die konkrete Implementierung (Definition) verzichten.

In Java ist der Begriff Schnittstelle eng mit sogenannten **abstrakten Klassen** verbunden. Damit bezeichnet man Klassen, deren Implementierung ganz oder teilweise offen ist:

- Eine **abstrakte Methode** ist eine nur deklarierte, aber nicht definierte (implementierte) Methode. Sie wird mit dem Modifikator `abstract` gekennzeichnet und erhält ein Semikolon nach der Deklaration.
- Eine Klasse, die eine abstrakte Methode enthält, muss selbst mit `abstract` gekennzeichnet werden. Eine solche Klasse kann **nicht** instanziiert werden (kein new).
- Jede Unterklasse einer abstrakten Klasse, die nicht alle abstrakten Methoden implementiert (durch Überschreiben), muss selbst abstrakt sein.
- Abstrakte Methoden können nicht static, private oder final sein.
- Auch eine Klasse ohne abstrakte Methoden kann mit `abstract` deklariert werden (kann dann nicht instanziiert werden!).

Als Beispiel kann man eine abstrakte Klasse `Shape` für ebene Figuren einführen. Diese Klasse nennt nur zwei Eigenschaften von ebenen Figuren, nämlich, dass sie eine Fläche und einen Umfang haben:

```
public abstract class Shape{
   public abstract double area();
   public abstract double circumf();
}
```

In den Unterklassen `Rectangle, Triangle, Circle` kann man diese Methoden dann implementieren. Wenn man aber z.B. für Dreiecke keine Formel kennt, die die Flächen nur aus den Seitenlängen bestimmt, ist es auch möglich, nur den Umfang zu implementieren und dafür die Klasse `Triangle` mit `abstract` zu deklarieren.
In der Klasse `Shape` sind alle Methoden abstrakt und damit ist sie auch ein Beispiel für ein **Interface**. Es gibt einen besondern Grund dafür, dass man zwischen gewöhnlichen abstrakten Klassen und Interfaces unterscheidet: Das Konzept der Einfachvererbung wird durch die Verwendung von Interfaces etwas aufgeweicht, denn eine Klasse kann neben der Vererbung durch seine Superklasse noch ein oder mehrere Interfaces implementieren, also

zusätzlich die Methoden des Interfaces erben. Konflikte, die normalerweise bei Mehrfachvererbung entstehen können (Erben von zwei gleichnamigen Methoden mit verschiedenen Definitionen), werden dabei vermieden, da die Methoden im Interface gar nicht definiert sind. Der Hauptnutzen eines Interfaces besteht also nicht in der Vererbung von konkreten Inhalten, sondern in der Beschreibung einer abstrakten Funktionalität. Jede Klasse, die das Interface implementiert, muss diese abstrakte Funktionalität durch konkrete Inhalte ausfüllen.
Folgendes sollte man beim Umgang mit Interfaces beachten:

- Das Schlüsselwort `interface` muss (an Stelle von `class`) vor der Definition stehen.
- Alle Methoden eines Interfaces sind (implizit) `public`, d.h. `private` und `protected` sind verboten.
- Alle Methoden eines Interfaces sind (implizit) `abstract`
- Ein Interface darf nur Attribute haben, die static und final sind.
- Ein Interface ist nicht instanziierbar und darf keinen Konstruktor haben.
- Wenn eine Klasse ein Interface implementiert, wird das durch das Schlüsselwort `implements` angezeigt. Die Klasse muss alle Methoden implementieren oder abstrakt sein.

Das folgende Beispiel zeigt ein Interface für Figuren, die in der Ebene liegen. Es fordert, dass man testen kann, ob ein Punkt in der Figur liegt und dass man die Figur in einer beliebigen Richtung verschieben kann:

```
public interface ShapeInPlane{
    public boolean inside(Point p); // man kann public auch weglassen
    public void shift(double x, double y);
}
```

Die Definition der Klasse `RectangleInPlane` würde dann wie folgt beginnen:

```
public class RectangleInPlane extend Rectangle implements ShapeInPlane{
```

Zur Implementierung von `shift` muss man nur die 4 Eckpunkte verschieben. Die Implementierung von `inside` ist etwas komplizierter. Eine Variante wäre der Test, ob der Punkt p im Dreieck $\Delta(pA, pB, pC)$ oder im Dreieck $\Delta(pC, pD, pA)$ liegt und diese Fälle durch Berechnung der sogenannten baryzentrischen Koordinaten (lineares Gleichungssystem) zu entscheiden. Als zweite Variante könnte man testen, ob p jeweils auf der linken Seite der vier gerichteten Geraden von pA nach pB, von pB nach pC, von pC nach pD und von pD nach pA liegt. Dazu muss man aber voraussetzen, dass das Rechteck gegen den Uhrzeiger orientiert ist.

Abstrakte Datentypen (ADTs)

Mathematische Strukturen und ihre Modellierung als ADTs

Ein **abstrakter Datentyp (ADT)** dient zur Beschreibung der (äußeren) Funktionalität und der (von außen) sichtbaren Eigenschaften von bestimmten Objekten und abstrahiert von der konkreten Art der Implementierung dieser Funktionalität. Wenn wir einen ADT zusammen mit einer Implementierung betrachten, sprechen wir von einer **Datenstruktur**. Unter spezieller Berücksichtigung der Java-Syntax kann ein ADT also durch ein Interface beschrieben werden, eine Datenstruktur ist in diesem Kontext eine Klasse, die das Interface implementiert. In der Regel sprechen wir bei einem Interface nur dann von einem ADT, wenn ein gewisser Bezug zu realen oder mathematischen Objekten gegeben ist.
Eine wichtige Motivation zum Entwurf von ADTs besteht darin, bestimmte Strukturen mit einem (manchmal minimalistischen) Konzept so zu beschreiben, dass man sie nutzen kann, ohne all ihre Details und ihren inneren Aufbau zu kennen. Auch hier wird wieder der Vorteil von Schnittstellen deutlich: Der Anwender kann die für ihn wichtige Funktionalität nutzen und gleichzeitig hat der Bereitsteller relativ große Freiheiten bei der konkreten Implementierung.
Auf der anderen Seite ist mit der fortschreitenden Entwicklung der Informatik eine Reihe von Datenstrukturen entwickelt worden, die sich als sehr nützlich und effizient erwiesen haben. Die abstrakte Beschreibung dieser Strukturen bildet ein reiches Reservoir an Standard-ADTs, die ein Programmierer möglichst gut kennen sollte, um seine Arbeit effektiv zu gestalten. Zu diesen ADTs gehören Stapel, Warteschlangen, Listen und Wörterbücher. Bevor wir uns damit näher beschäftigen, wollen wir einige vor allem in der Diskreten Mathematik häufig verwendete Strukturen kennenlernen und dafür geeignete ADTs diskutieren.
Die grundlegendste und gleichzeitig einfachste mathematische Struktur ist die **Menge**. Leider ist es relativ schwierig, gute Datenstrukturen für Mengen zu entwerfen. Ein wichtiger Grund dafür ist die Tatsache, dass eine Menge eine ungeordnete Struktur ist, in der Elemente nur einfach vorkommen. Ein ADT für Mengen sollte die Größe der Menge M angeben, sowie Elemente einfügen und streichen können. Bei der Implementierung ist zu beachten, dass bei der Anweisung ein bereits vorhandenes Element einzufügen oder ein nicht zur Menge gehörendes Element zu löschen, die Größe unverändert bleibt. Wir sprechen hier nur über endliche Megen, die Größe ist also eine natürliche Zahl. Darüber hinaus sollte der ADT die Abfrage beinhalten, ob ein bestimmtes Element zur Menge gehört. Wünschenswert wäre auch eine Aufzählung der Elemente, wobei das in beliebiger Reihenfolge beschehen kann.
Bei einer **geordneten Menge** spielt die Reihenfolge eine wichtige Rolle. Um neue Elemente richtig einzuordnen und die Elemente in der richtigen Reihenfolge aufzählen, muss entweder der Einfügeplatz angegeben werden oder der ADT muss über ein vorgegebenes Vergleichskriterium verfügen. Obwohl das nach zus"atzlichen Aufwand aussieht, werden Mengen oft als geordnete Mengen verwaltet.

Eine sehr verwandte Struktur ist die **Folge**, bei der die Reihenfolge eine Rolle spielt und bei der außerdem Elemente mehrfach auftreten können. Beim Einfügen und Streichen muss man auch die Stelle angeben (es ergibt sich nicht mehr aus einem Ordnungskriterium). Wichtig sind das erste und das letzte Element. Zum Durchlaufen der Folge gibt es zwei Varianten; Man kann fordern, auf eine bestimmte Position in der Folge zugreifen zu wollen, oder sich darauf beschränken, für jedes Element das Nachfolgeelement zu bekommen.
Eine weitere Familie von untereinander sehr verwandten mathematischen Strukturen sind **Relationen, Matrizen** und **Graphen**. All diese Strukturen beschreiben die Beziehungen zwischen Paaren von Elementen. Eine Relation gibt für jedes Paar (a, b) Auskunft, ob a in Relation (Beziehung) zu b steht, ein Graph sagt, ob der Knoten a mit dem Knoten b durch eine Kante verbunden ist und eine Matrix hat einen Wert in der a-ten Zeile und b-ten Spalte. Ist dieser Wert immer ein Boolescher, ist man zurück bei den Relationen. Ein ADT muss also die entsprechenden Anfragen beantworten und (eventuell) Werte auf Anweisung aktualisieren.
Die folgenden ADTs Stapel (Stack) und Warteschlange (Queue) sind nur eingeschränkt zur Verwaltung von Folgen geeignet, dennoch spielen sie gerade durch ihre Einfachheit eine sehr wichtige Rolle.

Stapel (Stacks)

Ein Stack verwaltet eine Folge von Objekten, wobei man immer ein Element anfügen oder das zuletzt angefügte Element wieder löschen kann. Beispiele für einen Stack (auf Deutsch Stapel oder Kellerspeicher) sind:

Kartenstapel: Bei einigen Patience-Spielen ist es erlaubt Karten auf einen Hilfsstapel abzulegen, wobei die Regel besagt, dass man mit einem Ass beginnen muss und dann die $2, 3, 4, \ldots$ der gleichen Farbe ablegen kann. Man darf keine Karte aus der Mitte des Stapels herausnehmen, sondern immer nur die oberste Karte abbauen.

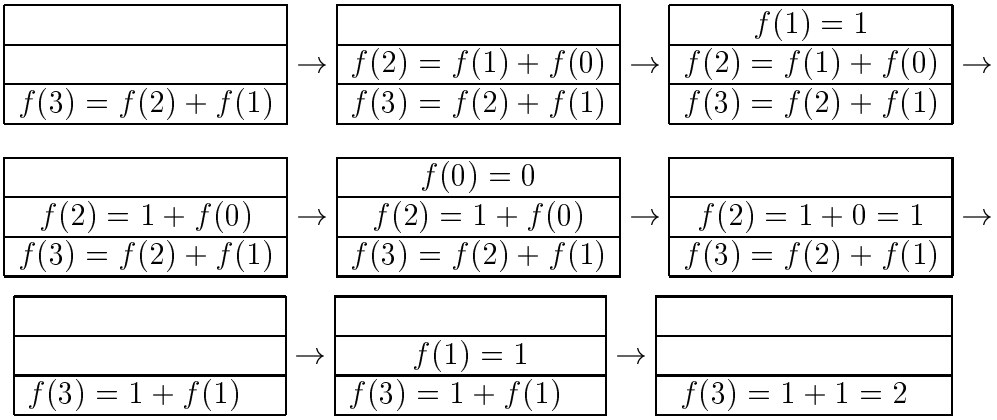
Back-Knopf bei Internet-Browsern: Beim Eingeben einer URL oder dem Anklicken eines Links wird ein Element auf den Stack gelegt. Die jeweils oben liegende URL wird angezeigt. Durch Back wird sie wieder heruntergenommen und die davor liegende URL wird angezeigt.

Rekursive Programmierung: Die Auswertung von rekursiven Funktionen und allgemein von verschachtelten Funktionsaufrufen erfolgt auf einem Stapel (Execution-Stack). Dazu wird die ursprünglich aufgerufene Funktion in die unterste Zelle des Stapels gelegt. Die Auswertung erfolt immer in der obersten (belegten) Zelle des Stapels. Ist die Auswertung noch nicht möglich, weil eine weiterer Funtionsaufruf erfolgt, wird dieser Aufruf (oben) auf den Stapel gelegt. Nur wenn die Auswertung ohne weitere Funktionsaufrufe möglich ist, wird der entsprechende Wert nach

unten übergeben und die oberste Zelle gelöscht. Wir zeigen das am Beispiel der Fibonacci-Rekursion.

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Aufruf $f(3)$ führt zu den folgenden Operationen auf dem Stack



Ähnlich wie im letzten Fall sind die Anwendungen zur Auswertung arithmetischer Ausdrücke oder zur Überprüfung der Korrektheit von Klammerausdrücken. Bei der Auswertung von arithmetischen Ausdrücken mit einem Stack benutzt man die umgekehrte polnische Notation (RPN). Die Bezeichnung polnische Notation führt man darauf zurück, dass sie von dem polnischen Mathematiker Lukasiewicz eingefürt wurde, nachdem er beobachtet hatte, dass die Verwendung von Präfix-Operatoren (d.h. erst der Operator dann die Argumente) das Klammersetzen überflüssig macht. So bedeutet der Ausdruck $+ - 8\ 3\ 2$ in üblicher Notation $(8 - 3) + 2$, während man $8 - (3 + 2)$ durch $-8 + 3\ 2$ dartsellen müsste. Umgekehrte polnische Notation bedeutet einfach die Operatoren hinter die Operanden zu stellen, also $8\ 3 - 2+$ im ersten und $8\ 3\ 2 + -$ im zweiten Fall. Zur Auswertung wird der Ausdruck von links nach rechts gelesen. Wird ein Operand gelesen, legt man ihn auf den Stack. Wird ein Operationssymbol gelesen, so werden die beiden obersten Operanden von Stack genommen, die Operation ausgeführt, und das Ergebnis auf den Stack gelegt. Der Stapel beinhaltet also nur Zahlen und am Ende steht das Ergebnis in der untersten Zelle.

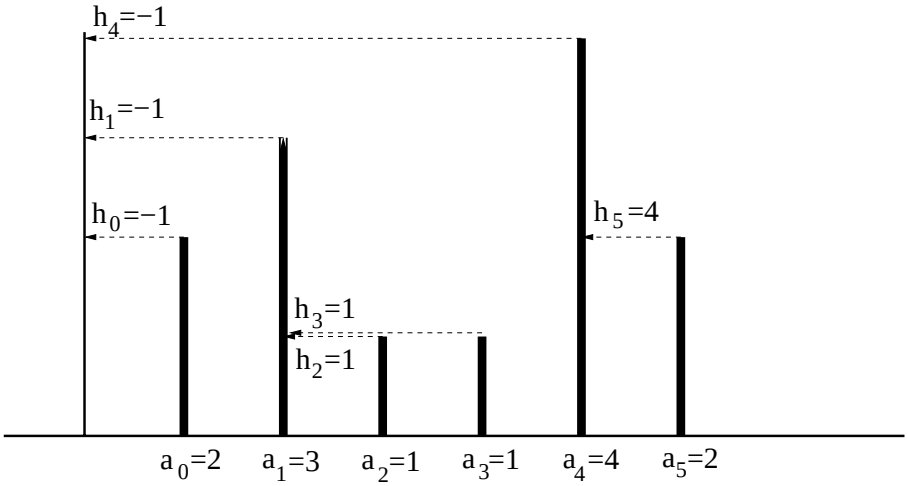
Eine weniger offensichtliche Anwendung der Stapel-Datenstruktur ergibt sich aus der folgenden Aufgabe. Gegeben ist eine Folge von Tageskursen (einer Aktie oder einer Währung) $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Gefragt sind die Spannen s_i der Tageskurse a_i, d.h. für wieviele Tage rückwirkend, der Tageskurs a_i mindestens so gut wie an den Vortagen war. Da der Tag selbst immer mitzählen soll, gilt $s_i \geq 1$. Etwas formaler definieren wir die Menge der besseren Vogängertage $B_i = \{j | 0 \leq j < i \text{ und } a_j > a_i\}$ und definieren

$$h_i = \begin{cases} max(B_i) & falls B_i \neq \emptyset \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann kann man die Spannen durch $s_i = i - h_i$ berechnen.

Dieser Ansatz liefert auch gleich eine algorithmische Idee. Für jeden Tag i geht man soweit zurück, bis man ein $a_j > a_i$ gefunden hat und setzt $h_i = j$. Wenn es ein solches j nicht gibt, wird $h_i = -1$ gesetzt. Mit $s_i = i - h_i$ erhält man die Spannen. Die Implementierung erfolgt in zwei Schleifen: die äußere für i von 0 bis n und die innere im schlechtesten Fall für j von $i-1$ bis 0. Insgesamt ergibt sich eine quadratische Laufzeit.

Mit einer besseren Idee und der Nutzung eines Stacks kommt man auf lineare Laufzeit: Die Kurse werden (zusammen mit ihrem Index, also als Paare (a_i, i)) auf einen Stack gelegt. Die Invariante ist, dass die Kursfolge im Stack von unten nach oben streng monoton fallend sein muss. Um das zu sichern, werden vor dem Einfügen von (a_i, i) alle kleineren oder gleichen Kurse (die müssen ganz oben liegen) gelöscht. Damit ist klar, dass unter (a_i, i) nun (a_{h_i}, h_i) liegt, bzw. wenn (a_i, i) alle anderen Einträge herausgeworfen hat und ganz unten steht, ist $h_i = -1$. Man kann also beim Eintragen von (a_i, i) den Index des darunter stehenden Eintrags lesen (das ist h_i), bzw. bei leerem Stack $h_i = -1$ setzen und $s_i = i - h_i$ ausrechnen.



Nachdem klar geworden ist, dass Stapel eine äußerst nützliche Datenstruktur sind, kommen wir zur Beschreibung des ADTs Stack. Ein Stack hat die Hauptmethoden:

```
void push(Object o); // Einfuegen des Objekts o auf oberste Position
Object pop();        // Entfernen des obersten Objekts plus Rueckgabe
                     // Fehlermeldung, wenn Stack schon leer ist
```

Die folgenden Methoden stellen eine sehr nützliche Ergänzung dar:

```
int size();         // Anzahl der Objekte im Stack zurueckgeben
boolean isEmpty();  // Stack leer?
Object top();       // oberstes Objekt zur\"uckgeben, ohne es zu loeschen
```

Wir werden drei verschiedene Implementierungen dieses ADTs besprechen und ihre Vor- und Nachteile vergleichen.

1. Implementierung mit einem Array fester Größe
Man definiert eine Klasse `ArrayStack`, die das Interface `Stack` implementiert und legt sich zuerst auf eine Default-Feldgröße fest, z.B. durch:
`public staitc final int CAPACITY = 1000;`
Daneben kann man noch eine Variable `public int cpacity;` einführen, um auch mit dem Konstruktor die Größe festlegen zu können. Die wichtigsten Attribute sind

```
private Object[] S;  // haelt die Daten des Stacks
private int top;     // am Anfang -1; es gilt size = top + 1
```

Die Konstruktoren legen ein Feld der gegebenen Größe an und setzen top auf -1. Die Zugriffsmethoden müssen natürlich den Wert von `top` aktualisieren. Die Methode `top()` greift auf `S[top]` zu.
Neben ihrer Einfachheit hat diese Implementierung den Vorteil, dass jede Operation in konstanter Zeit ausgeführt wird. Der Hauptnachteil besteht darin, dass ein weiterer Fehler beim Stack-Überlauf auftreten kann. Darüber hinaus kann der Default-Wert oder eine zu groß gewälter Konstruktorparameter zur Speicherverschwendung führen.

2. Implementierung mit verkettenen Listen
Vor der Definition der Klasse `ListStack` muss man eine Klasse `ListElem` für Listenelemente definieren. Ein Listenelement besteht aus zwei Referenzen
`private Object data;` und `private ListElem next;`.
Die erste Refernz verweist auf das Objekt, das eigentlich in der Liste gehalten werden soll, die zweite auf das Vorgängerelement in der Liste. Für beide Refernzen werden get- und set-Methoden implementiert.
Ein ListStack hält nur ein Listenelement `topElem` für den obersten Eintrag im Stack, alle anderen Inhalte sind über eine Kette von next-Zeigern erreichbar, den untersten Eintrag erkennt man daran, dass next auf null zeigt. Der Konstruktor setzt `topElem = null;` und folglich muss bei `isEmpty()` nur `topElem == null` getestet werden. Die push- und pop-Methoden arbeiten wie folgt:

```
public void push(Object o){
    ListElem newtop = new ListElem();
    newtop.setData(o);
    newtop.setNext(topElem);
    topElem = newtop;
}
public Object pop(){
    Object o = topElem.getData();
    topElem = topElem.getNext(); // Fehler abfangen!
    return o;
}
```

Auch diese Implementierung realisiert jede Operation in konstanter Zeit. Ein Überlauf des Stacks ist ausgeschlossen. Einziger Nachteil ist der Speicherverbrauch, da man

pro gespeichertem Objekt ein zusätzliche Referenz für `next` benötigt. Dafür ist der Speicherverbrauch aber jederzeit den dynamischen Erfordernissen angepasst.

3. Implementierung mit dynamischen Feldern
In diesem Fall wird wie im ersten ein Array, verwendet, mit dem Unterschied, dass die Arraygröße dynamisch an den tatsächlichen Bedaarf angepasst wird. Dazu wird immer, wenn das aktuelle Array entweder zu klein oder viel zu gro ist, ein neues Array passender Größe erzeugt, die Daten kopiert und das alte Array gelöscht. Dazu gibt es drei Regeln:

- Beginne mit einem Array der Größe N, wobei N vernünftig gewählt werden sollte.
- Wenn ein Objekt gepusht werden soll, und das Array voll ist, verdoppele die Größe des Arrays.
- Wenn im Array nur noch ein Viertel der Plätze belegt sind, und das Array noch mehr als N Elemente hat, halbiere die Größe des Arrays

Im Gegensatz zu den ersten beiden Lösungen kann hier eine Push- oder Pop-Operation unter Umständen sehr viel Zeit für das Umkopieren des Array-Inhalts verbrauchen. Wir beobachten aber, dass nach einer Größenänderung des Stacks eine gewisse Zeit garantiert keine zweite Größenänderung auftreten kann. Angenommen, der Stack ist gerade auf die Größe M verändert worden. Dann ist er halb voll, hat also $\frac{M}{2}$ Elemente. Die nächste Änderung tritt ein, wenn er entweder nur noch $\frac{M}{4}$ Elemente hat, oder auf M Elemente gefüllt wurde. Dazu werden im ersten Fall mindestens $\frac{M}{4}$ Pops benötigt, im zweiten Fall $\frac{M}{2}$ Pushes. Mit einer **amortisierten Analyse** schätzt man die durchschnittliche Laufzeit für eine Operation ab: Nach jeder Größenänderung des Stack-Arrays (auf die Größe M) kann man die dazu notwendigen $\frac{M}{2}$ Referenzkopien auf mindestens $\frac{M}{4}$ nachfolgende Stackoperationen umlegen, d.h. die durchschnittlichen Kopierkosten einer Push- oder Pop-Operation sind konstant. Diese Variante ist durch ihre dynamische Größenanpassung sehr speichereffizient. Sie wurde in `java.util.Stack` implementiert.

Anmerkungen:
1) Dynamische Arrays mit der oben beschriebenen Funktionsweise werden häufig verwendet. Man nennt diese Datenstruktur Vector. Sie ist in `java.util.Vector` implementiert und spielt auch in der STL (Standard Template Library) von C++ eine wichtige Rolle.
2) Ein gemeinsamer Vorteil der drei hier beschreibenen Stack-Implementierungen liegt darin, dass man sie für beliebige Klassenobjekte verwenden kann (Stack von Personen, Punkten, Strings, ...). Dabei wird einfach das Vererbungskonzept von Java zur Anwendung gebracht: Jede Klasse ist Unterklasse von Object und damit ist auch jedes Exemplar einer Klasse auch Exemplar von Object.
Schwierigkeiten gibt es nur mit primitiven Typen wie `int` oder `double`. Hier lässt sich aber auch ein einfacher Ausweg finden, nämlich die Benutzung der Wrapper-Klassen `Integer` oder `Double`.

Warteschlangen (Queues)

Eine Warteschlange (Queue) verwaltet eine Folge von Objekten, wobei man immer Objekte (an das Ende) anfügen kann und zu jedem Zeitpunkt das Objekt löschen kann, das (von den vorhandenen) als erstes eingefügt wurde.
Stack und Queue unterscheiden sich also nach dem Auswahlprinzip für das zu löschende Element:

Stapel (Stack)	Warteschlange (Queue)
last in first out	first in first out
LIFO	**FIFO**

Typische Anwendungen für Warteschlangen (in der Informatik):

- Druckerschlange
- Tastatureingabe
- Multitask-Systeme

Bei der Beschreibung einer Queue als ADT ergeben sich die folgenden Hauptmethoden:

```
void enqueue(Object o); // Einfuegen des Objekts o an letzte Position
Object dequeue();       // Entfernen des vordertsten Objekts plus Rueckgabe
                        // Fehlermeldung, wenn Queue schon leer ist
```

sowie als Ergänzung die Methoden:

```
int size();         // Anzahl der Objekte in der Queue zurueckgeben
boolean isEmpty();  // Queue leer?
Object front();     // vorderstes Objekt zur\"uckgeben, ohne es zu loeschen
```

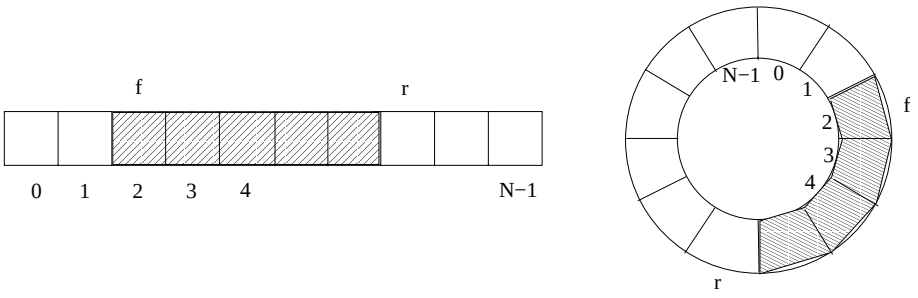
Ähnlich wie im Fall von Stacks kann man sich bei Queues prinzipiell für Implementierungen mit Arrays und mit verketteten Listen entscheiden.

1. Implementierungen von Queues mit Arrays

a) In der einfachsten Version wird ein Array Q der Default-Größe N oder einer als Parameter übergebenen Größe n angelegt. Zwei Zahlen f und r repräsentieren die erste belegte Zelle und die erste freie Zelle hinter dem belegten Teil. Der Spezialfall einer leeren Queue wird durch $f = r$ repräsentiert, d.h. die Konstruktoren setzen f und r auf 0. Zum Einfügen wird in $Q[r]$ die Referenz auf das einzufügende Objekt eingetragen und r um 1 erhöht. Zum Entfernen wird $Q[f]$ (das ist das zuerst eingefügte Element) zurückgegeben und f um 1 erhöht. Die aktuelle Größe ergibt sich einfach durch $r - f$.
Bei dieser Queue-Implementierung können (im Gegensatz zur Stack-Implementierung mit Feldern fester Größe) auch dann ein Überlauf-Problem auftreten, wenn nur sehr wenige Objekte in der Warteschlange stehen. Der Grund für diesen Unterschied erklärt sich daraus, dass beim Stack freigegebnener Speicherplatz für neue Einträge genutzt werden kann (die Zahl *top* kann steigen und fallen, während für die Queue die Zahl r mit jedem neuen Eintrag steigt. Die Implementierung mit dynamischen Arrays (Vektoren)

könnte in diesem Fall den Überlauf verhindern, aber keine dynamische Anpassung des Speicherbedarfs sicher stellen.

b) Die Wiederverwendung von freigewordenen Speicherplatz wird durch sogenannte zyklische Arrays möglich. Man kann sich das als ein Feld von Daten vorstellen, das zu einem Ring geschlossen wurde. Die Idee ist in der folgenden Abbildung illustriert.



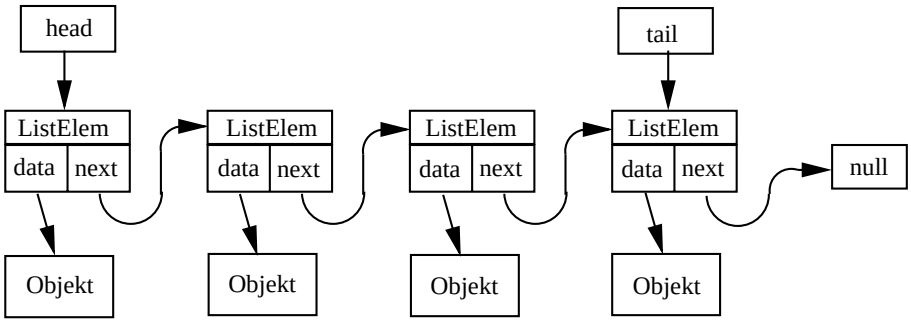
Natürlich gibt es im Rechner keinen Speicher dieser Art, man muss den Ringschluss durch Indexarithmetik modulo N simulieren. Die Zahlen f und r repräsentieren nun in Uhrzeigerrichtung die erste belegte Zelle und die erste freie Zelle hinter dem belegten Teil. Beim Einfügen muss r und beim Entfernen muss f um 1 modulo N erhöht werden. Ein Überlauffehler tritt immer dann auf, wenn in einer Einfügeoperation die Situation $f == r$ eintritt. Wenn die Situation $f == r$ durch eine Löschoperation entsteht, ist das zulässig, die Anwendung einer Löschoperation bei $f == r$ führt aber zu einem Fehler. Man kann beobachten, dass bei dieser Implementierung immer mindestens eine Zelle unbelegt bleiben muss, da man nur durch die Werte von f und r nicht zwischen einem voll belegtem und einem leeren zyklischen Array unterscheiden kann. Durch Kombination von zyklischen Arrays mit dynamischer Größenanpassung werden Überlauffehler verhindert.

2. Implementierung mit verkettenen Listen

Wie schon bei Stacks wird hier mit der Klasse `ListElem` gearbeitet. Der wesentliche Unterschied zur Stack-Implementierung besteht darin, dass eine Klasse `ListQueue` zwei Referenzen auf Listenelemente benötigt, das erste und das letzte in der verketten Liste. Wir nennen sie `head` und `tail` (zur Erinnerung, bei Stacks brauchte man nur das erste Element).

Bleibt die Frage, wie man einfügen und löschen kann. Es ist leicht zu sehen, dass man auf beiden Seiten einfügen könnte. Zuerst wird ein neues Listenelement `le` erzeugt und die Referenz `data` auf das einzufügende Objekt gesetzt. Will man `le` auf der rechten Seite (tail) einfügen, so muss `tail.next` auf `le` und `le.next` auf `null` gesetzt werden und zum Abschluss setzt man `tail=le;`. Will man `le` auf der linken Seite (head) einfügen, so muss `le.next` auf `head` und `head=le;` gesetzt werden. Dagegen ist das Löschen nur auf der Seite von `head` möglich. Deahlb wird bei einer Queue-Implementierung auf der `tail`-Seite eingefügt und auf der `head`-Seite gelöscht.

Aus dieser Beschreibung folgt, dass alle Queue-Operationen auf verketteten Listen in

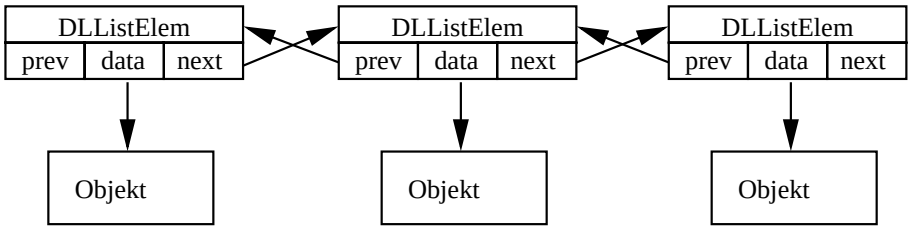


konstanter Zeit ausgeführt werden.

Double-Ended Queues
Eine Double-Ended Queue (Deque, gesprochen Deck) ist eine geordnete Datenstruktur, bei der man am Anfang und am Ende der Ordnung jeweils einfügen und löschen kann. Ein solcher ADT ist durch die folgenden Methoden gekennzeichnet:

```
void insertFirst(Object o);
void insertLast(Object o);
Object removeFirst();
Object removeLast();
Object first();    \\erstes Objekt zurueckgeben ohne zu loeschen
Object last();     \\letztes Objekt zurueckgeben ohne zu loeschen
```

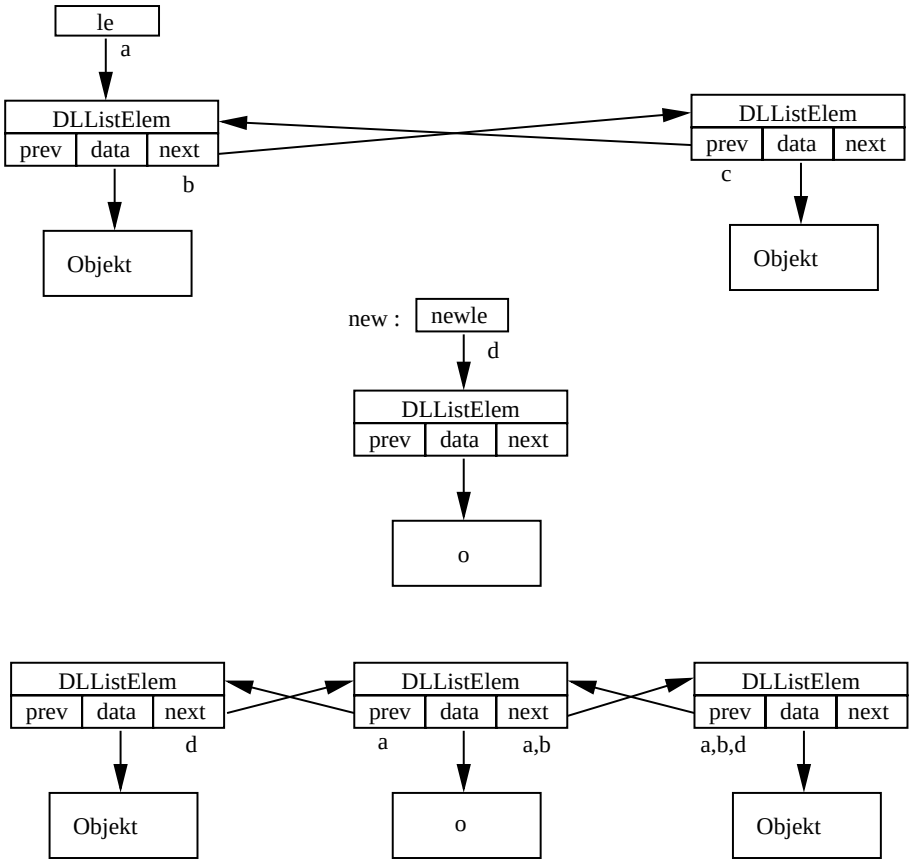
Damit ist klar, dass man mit einer Deque-Implementierung sowohl einen Stack als auch eine Queue simulieren kann. Die Implementierung kann wieder mit zyklischen, dynamischen Arrays erfolgen oder mit doppelt verketteten Listen. Die Idee zu dieser Struktur besteht darin, zu jeder `next`-Referenz von einem Listenelement auf das nächste auch die Rückreferenz `prev` zu speichern. Die folgende Abbildung illustriert den Aufbau eines Listenelements in einer doppelt verketteten Liste:



Ein Objekt von `DLListElem` hat also die Attribute

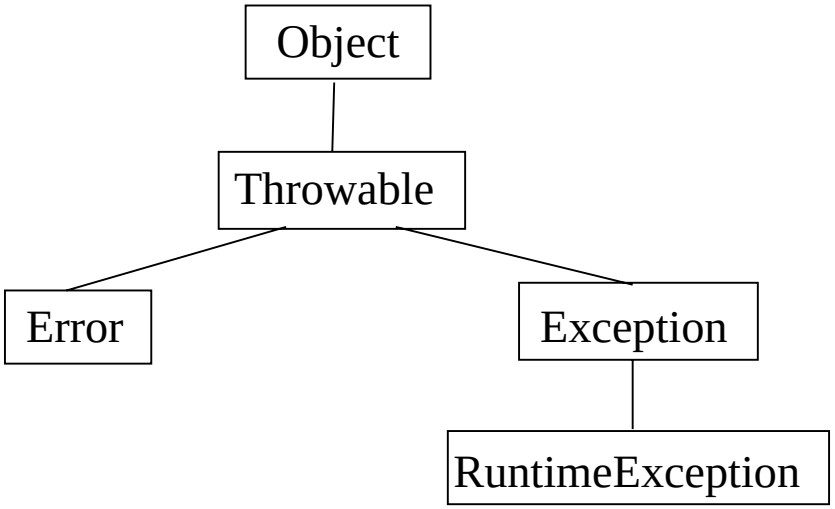
```
Object data;
DLListElem next;
DLListElem prev;
```

Die Einfüge- und Löschoperationen funktioniern, wie schon bei den Queues beschrieben, in konstanter Zeit. Darüber hinaus kann man bei doppelt verketteten Listen auch an beliebigen Stellen in konstanter Zeit Objekte einfügen und wieder löschen. Man braucht zum Einfügen nur eine Referenz auf das Listenelement, hinter dem eingefügt werden soll, und zum Löschen eine Referenz auf das zu streichende Listenelement.
Die folgende Abbildung beschreibt die Schritte zur Ausführung einer Einfügeoperation eines Objekts `o` hinter ein gegebenes `DLListElem le`. Zuerst muss ein neues `DLListElem newle` angelegt werden, dessen `data`-Referenz auf `o` gesetzt wird. Danach müssen die `prev`- und `next`-Referenzen von newle, die `prev`-Referenz des alten Nachfolgers von `le` und zuletzt die `next`-Referenz von `le` neu gesetzt werden. Die Buchstaben unter den entsprechenden Feldern zeigen an, welche von den alten Referenzen gebraucht werden, um die neue Referenz festzulegen.



Fehlerbehandlung

Bei den verschiedenen Implementierungsvarianten für Stacks und Queues wurde mehrfach auf die möglichen Fehler verwiesen. Das Auftreten eines Fehlers führt normalerweise zum Abbruch des Programms. Zum Sprachkonzept von Java gehört aber ein Mechanismus, mit dem man auftretende Fehler, genauer sollte man hier von Ausnahmesituationen sprechen, abfangen und behandeln kann. Wir werden die Funktionsweise dieser Ausnahmebehandlung am Beispiel der Queue-Implementierung mit zyklischen Arrays besprechen.
Der Mechanismus zur Ausnahmebehandlung ist (wie alle anderen wichtigen Sprachbestandteile) in das Klassenkonzept eingebettet. Wir unterscheiden zwischen Fehlern (Klasse `Error`) und Ausnahmen (Klasse `Exception`). Beide Klassen sind Erweiterungen von `Throwable` und besitzen eine Reihe von vordefinierten Unterklassen. Methoden, in denen ein Fehler oder eine Ausnahmesituation auftritt, "werfen" ein Objekt der entsprechenden Klasse. Objekte der Klasse `Error` beschreiben schwere Fehler, die zum Abbruch des Programms führen. Beispiele dafür sind `IllegalAccessError`, `NoSuchMethodError` und `OutOfMemoryError`. Dagegen können Objekte der Klasse `Exception` "abgefangen" und behandelt werden, so dass das Programm weiter ausgeführt werden kann. Vordefinierte Beispiele dafür sind `NullPointerException` und `ArrayIndexOutOfBoundException`. Der folgende Ausschnitt des Klassendiagramms illustriert die Situation:



Bei Ausnahmen unterscheidet man überprüfte (checked) und nicht überprüfte (unchecked) Exceptions. Nicht überprüft werden nur Unterklassen der Klasse `RuntimeException` (vordefiniert), alle anderen Ausnahmen werden vom Compiler überprüft. Das bedeutet insbesondere, dass in der Deklaration einer Methode `f(...))` vermerkt werden muss, ob bei der Ausführung eine bestimmte Ausnahme `MyException` geworfen werden könnte (ob das wirklich passiert hängt in der Regel von den übergebenen Parametern ab). Eine solche Deklaration könnte z.B. so aussehen:

```
public void f(int i) throws MyException
```

Da eine nicht abgefangene Exception an die aufrufende Methode weitergericht wird, muss auch jede Methode, die `f()` aufruft, `MyException` abfangen (Details später) oder `throws MyException` in der Deklaration verwenden. Nicht überprüfte Ausnahmen, also RuntimeExceptions werden nicht deklariert. Eine Ausnahme, die bis in die Methode `main` gereicht und von dort geworfen wird, führt zum Programmabbruch.
Zum Abfangen von Ausnahmen verwendet man die `try/catch/finally`-Anweisung. Dabei wird mit `try` ein Block von Anweisungen gebildet, der durch eine eventuell geworfene Exception vorzeitig verlassen wird. An den `try`-Block können sich ein oder mehrere `catch`-Blöcke anschließen, wobei jeder eine Exception-Klasse abfangen kann. Die abzufangende Exception-Objekt wird als Parameter übergeben. Im `catch`-Block wird beschrieben, wie man sich verhalten will, z.B. Ausgabe einer Warnung und/oder Festlegung eines Default-Rückgabewerts. Die Anweisung kann (optional) durch einen `finally`-Block abgeschlossen werden, der in jedem Fall ausgefürt wird, egal ob eine Exception abgefangen oder nicht abgefangen wurde oder gar keine Exception geworfen wurde. Diese Blöcke werden oft zum Schließen von geöffneten Dateien verwendet.
Bei selbstdefinierten Ausnahmeklassen muss man sich entscheiden, ob alle Exceptions dieser Art in der gleichen Weise behandelt werden sollen (in diesem Fall genügt ein Default-Konstruktor) oder ob man konkrete Informationen über die Umstände benötigt, unter denen die Exception auftrat. Diese Informationen müssen dem Konstruktor als Parameterübergeben und duch Attribute der Klasse festgehalten werden.
In unserem Beispiel geht es um die Ausnahmesituation `FullQueueException`, in der ein zyklisches Array vollgeschrieben wird (Eine Zelle müsste frei bleiben). Da unsere Fehlerbehandlung nur darin bestehen wird, den Eintrag zu verweigern und eine Warnung auszugeben, können wir uns auf den Default-Konstruktor beschränken:

```
public class FullQueueException extends Exception{
        public FullQueueException(){super();}
}
```

Folgendes Interface muss implementiert werden:

```
public interface Queue{
    public void     enqueue(Object o);  //Einfuegen
    public Object   dequeue();          //Rueckgabe und Loeschen
    public int      size();
    public boolean  isEmpty();
    public Object   front();            //Rueckgabe ohne Loeschen
}
```

Die einfachste Queue-Implementierung mit einem (nichtzyklischen) Array hat die folgende Gestalt:

```
public class ArrayQueue implements Queue{
    public int N;        //frei waehlbare  Groesse des Arrays
    private Object[] Q;  //Array fuer Queue-Inhalt
```

```
    private int f;       //erste belegte Zelle
    private int r;       //erste freie Zelle hinter belegtem Teil
    public ArrayQueue(int n){
        N = n;  f=0;  r=0;
        Q = new Object[n];
   } //Aus Platzgruenden kein Default-Konstruktor
// Methoden ohne  Fehlerbehandlung bei Ueberlauf bzw. bei leerer Queue:
    public void     enqueue(Object o){ Q[r++] = o;}
    public Object   dequeue(){return Q[f++];}
    public int      size(){return( N+r-f );}
    public boolean  isEmpty() {return( r==f );} ;
    public Object   front(){return Q[f];}
}
```

Diese Implementierung vernachlässigt die Fehlererkennung und Behandlung, aber bei Verwendung der folgenden Test-Klasse sieht man, dass durch den Versuch außerhalb der Arraygrenzen zu schreiben bereits eine `java.lang.ArrayIndexOutOfBoundsException` geworfen wird, die zum Programmabbruch führt.

```
public class Test{
      public static void main(String[] args){
          ArrayQueue q = new ArrayQueue(4);
          String s = "erster";
          String t = "zweiter";
          String u = "spaeterer";
          q.enqueue(s);
          q.enqueue(t);
          System.out.println(q.dequeue());
          for(int i = 0; i < 8; i++){q.enqueue(u);}
      }
}
```

Bei der Implementierung mit zyklischen Arrays sollte man unbedingt eine Fehlerbehandlung vornehmen, denn anderenfalls werden Inhalte der Queue ohne Warnung überschrieben. Das folgende Beispiel, in dem die Array-Methoden nur dadurch modifiziert werden, dass man alle Indexoperationen modulo N ausgeführt, demonstriert diesen Effekt:

```
// Methoden ohne  Fehlerbehandlung bei Ueberlauf bzw. bei leerer Queue:
    public void     enqueue(Object o){
        Q[r] = o;
        r= (r+1)%N;
    }
    public Object   dequeue(){
        Object o= Q[f];
        f= (f+1)%N;
```

```
        return(o);
    }
    public int      size(){return((r-f)%N);}
    public boolean  isEmpty() {return( r==f );} ;
    public Object   front(){return Q[f];}
```

Nach Austausch der Methoden und Aufruf der Testklasse, erfolgt weder eine Fehlermeldung noch ein Programmabbruch, aber der String `"zweiter"`, der eigentlich an zweiter Stelle ausgegeben werden müsste, wurde zum Ausgabezeitpunkt schon überschrieben.
Dieser Fehler in der Methode `enqueue` wird mit der folgenden Variante geworfen. Man beachte, dass der Zusatz `throws FullQueueException` auch im Interface einzufügen ist.

```
    public void enqueue(Object o) throws FullQueueException{
        if( (r+1-f)%N == 0) throw new FullQueueException();
        Q[r] = o;
        r= (r+1)%N;
    }
```

Diese Fehler können dann in der `main`-Methode abgefangen werden, indem man jeden Aufruf von `enqueue` in einen `try`-Block setzt.

```
   try{q.enqueue(s);}
   catch(FullQueueException e){
         System.out.println("Queue voll, Eintrag nicht realisiert");}
    }
```

Damit hat man nicht die beabsichtigte Funktionalität gerettet, denn der geforderte Eintrag in die Queue wurde einfach ignoriert, aber das Überschreiben von Objekten, die bereits in der Queue sind, wird verhindert und die Ausnahme wird für den Anwender sichbar gemacht.
Hinweis: Bei der hier beschriebenen Fehlerbehandlung ging es vor allem darum, die notwendigen Schritte an einem einfachen Beispiel zum Vorlesungsstoff zu demonstrieren, und weniger um die Beschreibung einer optimalen Lösung. Diese erhält man mit dynamischen, zyklischen Arrays.

Bäume

Motivation: Der Sequence-ADT

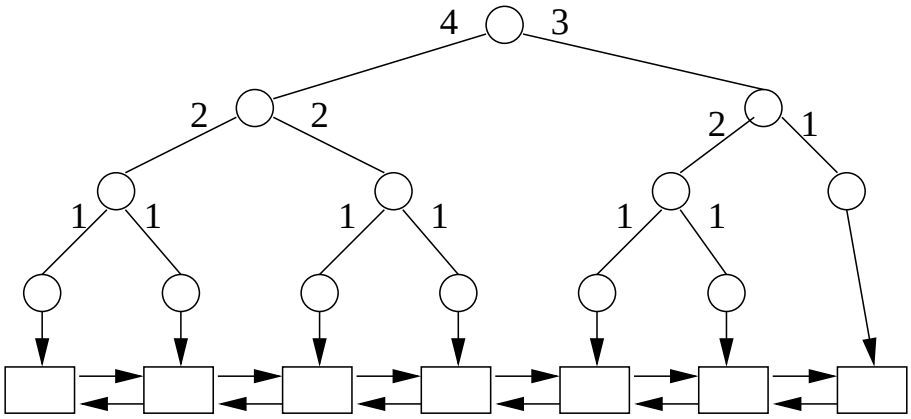
Der Begriff **Sequence** (**Folge**) bezeichnet einen ADT, der eine Verallgmeinerung von Stack, Queue und Deque ist. Auch hier werden Daten in einer linearen Ordnung gehalten, aber der Zugriff auf die Daten kann an beliebger Stelle erfolgen. Dabei unterscheidet man zwischen der Position und dem Rang eines Elements. Unter der Position des Elements verstehen wir eine Referenz auf das Element. Dagegen ist der Rang die nummerierte Stelle des Elements in der Folge. Neben dem Zugriff auf ein Element über seine Position oder über seinen Rang sind Einfügeoperationen vor oder hinter einer gegebenen Position bzw. auf einem bestimmten Rang und Löschoperationen an einer Position oder auf einem bestimmten Rang gefordert.
Wie bereits bei Deques besprochen, kann dieser Datentyp durch dynamische Arrays oder durch doppelt verkettete Listen implementiert werden. Die Vor- und Nachteile dieser Implementierungen werden in der folgenden Tabelle deutlich. Die Größe der Folge wird mit n bezeichnet.

Operation	Laufzeit bei Array-Implementierung	Laufzeit bei Implementierung mit doppelt verk. Listen
Zugriff auf Position	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Zugriff auf Rang	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$
Einfügen mit Position	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$
Einfügen mit Rang	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
Löschen mit Position	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$
Löschen mit Rang	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$

Der einzige wesentliche Vorteil der Array-Implementierung liegt also im Zugriff auf das Element mit Rang k, für den man bei der Listenimplementierung k next-Referenzen vom Anfangselement verfolgen muss. Beim Einfügen und Löschen mit Rang hat die Array-Implementierung zwar auch den Vorteil, das man unmittelbar auf die Stelle zugreifen kann, aber dafür mus der gesamte Array-Inhalt hinter dieser Stelle um eins nach rechts (Einfügen) oder um eins nach links (Löschen) verschoben werden. Keine dieser Implementierungen ist also wirlich befriedigend.

Die Idee für eine effizientere Implementierung gründet sich zuerst auf die Beobachtung, dass sich alle Nachteile der Listenimplementierung auf einen Punkt fokussieren lassen: Das Finden der Position (Referenz) bei gegebenen Rang. Ist das geschehen, kann auch in konstanter Zeit eingefügt und gelöscht werden. Um den Zusammenhang zwischen Rang und Position algorithmisch schneller bearbeiten zu können, wird ein binärer Baum über die Liste gelegt, so dass jedes Blatt eine Referenz auf ein darunter liegendes Listenelement hält. Wenn man zusätzlich in jedem inneren Knoten vermerkt, wieviele Blätter der linke und der rechte Teilbaum enthalten, kann man leicht einen Algorithmus entwerfen, der bei gegebenem k von der Wurzel beginnend das k-te Blatt erreicht. Die Zeit ist proportional zur Tiefe des Baums, bei einem balancierten Baum $O(\log_2 n)$. Beim

Einfügen und Löschen muss natürlich auch der Baum aktualisiert werden, aber das geht wieder in logarithmischer Zeit.



Das Hauptproblem besteht darin, dass bei einer ungünstigen Folge von Einfügeoperationen der Baum die Balanceeigenschaft verlieren und damit die Zeit auf $\Omega(n)$ anwachsen kann. Es gibt verschiedene Ansätze zur Lösung dieses Problems mit denen wir uns in den nächsten Vorlesungen beschäftigen werden.

Bäume mit Wurzeln (rooted Trees)

Definition: Ein **(gewurzelter) Baum** besteht aus einer Menge T von **Knoten**, die wie folgt strukturiert ist:

1. Es gibt genau einen hervorgehobenen Knoten $r \in T$, die **Wurzel** des Baums
2. Jeder Knoten außer r hat genau einen **Vaterknoten** (pc: **Elternknoten**)
3. Die Wurzel r ist **Vorfahre** jedes Knotens.

Dabei wird der Begriff $v \in T$ ist **Vorfahre** $u \in T$ rekursiv definiert, durch
i) $u = v$ oder
ii) v ist Vorfahre des Vaterknotens von u

Weiter Begriffe, die mit dieser Definition in Zusammenhang stehen, sind:
$u \in T$ ist **Kind** von $v \in T$ genau dann, wenn v Vaterknoten von u ist.
$u \in T$ ist **Nachfahre** von $v \in T$ genau dann, wenn v Vorfahre von u ist.
$u \in T$ und $v \in T$ sind **Geschwister** genau dann, wenn sie den selben Vaterknoten haben.
Knoten ohne Kinder heißen **Blätter** oder **äußere Knoten**.
Knoten mit (mindestens) einem Kind heißen **innere Knoten**.
Wenn wir in diesem Teil der Vorlesung von einem Baum sprechen, meinen wir immer einen gewurzelten Baum. Wir werden später auch ungewurzelte Bäume kennenlernen.

Definition: Ein Baum ist ein **geordneter Baum**, wenn für jeden Knoten die Menge seiner Kinder geordenet ist (erstes Kind, zweites Kind,...).

Der Baum-ADT

Die Beschreibung eines ADTs für gewurzelte Bäume weist große Ähnlichkeit zum Listen-ADT auf. Auch hier konzentriert sich die Beschreibung auf die Knoten. Zur Reprsentation des Baums reicht dann ein einzelner Knoten, nämlich die Wurzel aus. Ein Baumknoten muss die Referenzen auf den Elternknoten und die Kinder sowie auf ein Objekt (falls der Knoten Daten speichern soll) halten. Der Typ `TreeNode` wird durch die folgenden Methoden beschrieben:

```
TreeNode  parent();    //der Elternkonten
Object  element();     //die Daten
TreeNode[] children(); //Liste der Kinder
boolean isRoot();
boolean isLeaf();
void  setElem(Object e);
void  setParent(TreeNode v);
void  addChild(TreeNode v);   //dazu muss v setParent(this) ausf\"uhren
void  addSubtree(TreeNode v); //alternative Variante
```

Definition: Ist T ein Baum und $T' \subseteq T$ eine Untermenge der Knotenmenge, so nennen wir T' einen Unterbaum von T, wenn T' selbst ein Baum ist und für jeden Knoten $v \in T'$ auch alle Kinder von v zu T' gehören.

Wie man leicht sieht gibt es eine Bijektion (d.h. eine umkehrbare Abbildung) zwischen der Menge der Knoten und der Menge der Unterbäume von T. Einerseits kann man jedem Knoten v, den Unterbaum aller Nachfolger von v (inklusive v als Wurzel) zuordnen. Für die Umkehrabbildung ordnen wir jedem Unterbaum seine Wurzel zu.
Definition: Sei T ein Baum und $v \in T$ ein Knoten. Der Abstand von v zur Wurzel nennen wir die Tiefe von v und den Abstand von v zu seinem weitesten Nachfahren die Höhe von v. Die Höhe der Wurzel definiert die Höhe und gleichzeitig die Tiefe des Baums.
Beide Definitionen kann man rekursiv formulieren und auch entsprechend implementieren:

$$\text{Tiefe}(v) = \begin{cases} 0 & \text{falls } v \text{ die Wurzel ist} \\ 1 + \text{Tiefe(Vater von } v) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{Höhe}(v) = \begin{cases} 0 & \text{falls } v \text{ ein Blatt ist} \\ 1 + max\{\text{Höhe}(u) | u \text{ ist Kind von } v\} & \text{sonst} \end{cases}$$

```
int depth(){   // als Methode von TreeNode
          int d=0;
          if(! isRoot()) d = 1 + parent().depth();
          return d;
}
```

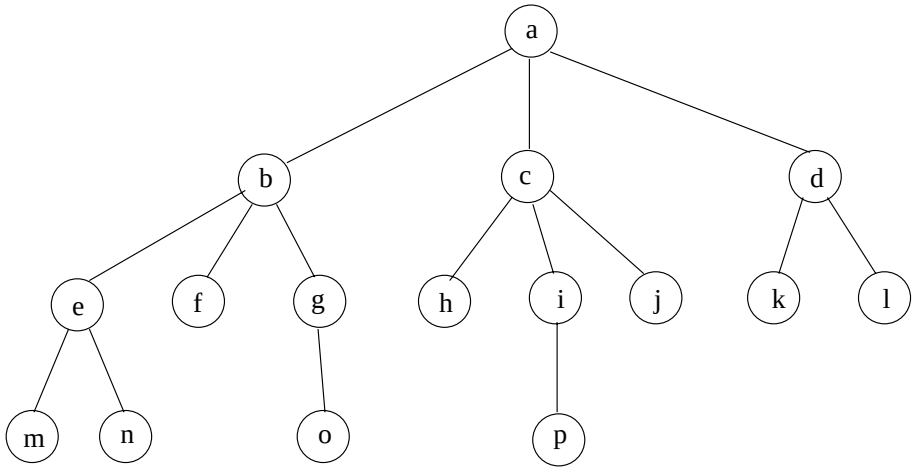
```
int height(){   // als Methode von TreeNode
          int h=0;
          if(! isLeaf()){
                 for(int i=0; i< children().length; i++)
                          if(h < (children()[i]).height()){
                              h= (children()[i]).height();
                          }
          }
          return h;
}
```

Die Laufzeit der Tiefenberechnung ist proportional zur Tiefe, die Laufzeit der Höhenberechnung ist proportional zur Größe des Unterbaums.

Ähnlich wie bei verketteten Listen wird ein Baum nur durch seine Wurzel repräsentiert. Die vollständige Struktur ergibt sich erst durch die Verkettung von Referenzen. Da diese Struktur komplexer als bei verketteten Listen ist, spielen Methoden zum Durchlaufen von Bäumen (tree traversals) eine wichtige Rolle. Zwei dieser Durchlaufmethoden kann man für beliebige Bäume anwenden: **Preorder-** und **Postorder-Traversierungen**. Sie laufen nach den folgenden Regeln ab:

- **Preorder:** Für jeden zu durchlaufenden Teilbaum besuche zuerst die Wurzel und durchlaufe dann nacheinander die Teilbäume aller Kinder.
- **Postorder:** Für jeden zu durchlaufenden Teilbaum durchlaufe nacheinander die Teilbäume aller Kinder und zum Schluss die Wurzel.

Für den abgebildeten Baum ergibt sich beim Preorder-Durchlauf die Knotenfolge
$a, b, e, m, n, f, g, c, o, h, i, p, j, d, k, l$
und beim Preorder-Durchlauf die Knotenfolge
$m, n, e.f.o, g, b, h, p, i, j, c, k, l, d, a.$



Binäre Bäume

Die Begriffsdefinition ist in der Literatur leider nicht ganz eindeutig. Die allgemeinere Definition (wie auch in Informatik A verwendet) nennt einen Baum binär, wenn jeder Knoten höchstens zwei Kinder besitzt und jedes Kind als rechtes bzw. linkes Kind gekennzeichnet ist. Im Spezialfall, wenn jeder innere Knoten zwei Kinder hat, spricht man dann von einem echten, vollen oder vollständigen binären Baum. Wir werden uns in diesem Semester nur mit dem Spezialfall beschäftigen und den Begriff des vollständigen binären Baums noch einmal neu (anders als in Informatik A) definieren.

Definition: Ein **binärer Baum** ist ein geordneter Baum, bei dem jeder innere Knoten genau zwei Kinder hat. Das erste Kind nennt man auch **linkes Kind** und das zweite **rechtes Kind**.

Mit den folgenden Sätzen werden die wichtigsten Fakten über die Anzahl von Blättern und inneren Knoten in einem binären Baum zusammengestellt. Man beachte, dass sich diese Aussagen auf die hier verwendete Definition beziehen und bei der Verwendung der allgemeinen Definition zum Teil falsch sind. Wir werden im Folgenden mit $i(T)$ und $b(T)$ die Anzahlen der inneren Knoten und Blätter des Baums T bezeichnen. Für die Höhe eines Knotens v bzw. des Baums T werden wir die Bezeichnungen $h(v)$ bzw. $h(T)$ verwenden.

Satz 1: Für jeden binären Baum T gilt $b(T) = i(T) + 1$.
Der Beweis erfolgt mit verallgemeinerter vollständiger Induktion nach $h(T)$. Der Induktionsanfang für $h(T) = 0$ ist einfach, denn in diesem Fall ist die Wurzel von T ein Blatt und folglich $b(T) = 1 = 0 + 1 = i(T) + 1$.
Sei der Satz für alle binären Bäume der Höhe $\leq n$ bewiesen und sei T ein Baum der Höhe $n + 1$. Dann liegen unter der Wurzel r von T zwei Teilbäume T_l und T_r deren Höhe $\leq n$ ist. Folglich kann man für beide die Induktionsvorausetzung anwenden. Offensichtlich gilt auch $b(T) = b(T_1) + b(T_2)$ sowie $i(T) = i(T_1) + i(T_2) + 1$, da die Wurzel ein zusätzlicher innerer Knoten von T ist. Daraus kann die Induktionsbehauptung wie folgt abgeleitet werden:

$$b(T) = b(T_1) + b(T_2) = (i(T_1) + 1) + (i(T_2) + 1) = (i(T_1) + i(T_2) + 1) + 1 = i(T) + 1.$$

Satz 2: Sei T ein binären Baum mit der Höhe h mit n Knoten. Dann gelten die folgenden vier Bedingungen:

$$\begin{array}{lrcl}
1) & h + 1 \leq & b(T) & \leq 2^h \\
2) & h \leq & i(T) & \leq 2^h - 1 \\
3) & 2h + 1 \leq & n & \leq 2^{h+1} - 1 \\
4) & \log_2(n+1) - 1 \leq & h & \leq \frac{n-1}{2}
\end{array}$$

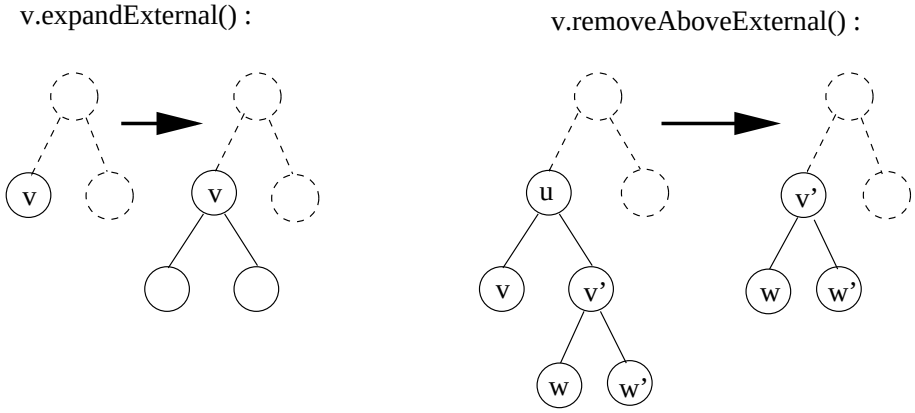
Beweisidee: Die zwei Ungleichungen in der ersten Aussage beweist man wie oben mit verallgemeinerter vollständiger Induktion. Die zweite Aussage folgt unmittelbar aus der ersten durch Anwendung von Satz 1. Die dritte Aussage ist nur die Zusammenfassung der ersten beiden Aussagen, denn $n = b(T) + i(T)$. Die vierte Aussage folgt aus der dritten durch einfache Umformungen, wobei die linke Ungleichung aus 3) die rechte Ungleichung aus 4) impliziert, während aus der rechten Ungleichung aus 3) die linke Ungleichung aus 4) folgt:

$2h + 1 \leq n \iff 2h \leq n - 1 \iff h \leq \frac{n-1}{2}$

$n \leq 2^{h+1} - 1 \iff n + 1 \leq 2^{h+1} \iff \log_2(n+1) \leq h + 1 \iff \log_2(n+1) - 1 \leq h$

Man teilt die Knoten eines binären Baums oft bezüglich ihrer Tiefe in Niveaus (Level) ein. Level 0 enthält nur die Wurzel, Level 1 die Kinder der Wurzel und allgemein Level k alle Knoten der Tiefe k.

Das Interface für Knoten von binären Bäumen kann man nicht als einfache Erweiterung von `TreeNode` beschreiben, denn insbesondere beim Einfügen und Löschen von Knoten muss beachtet werden, dass man weiterhin einen binäre Baum (in Sinne unserer Definition) behält.
1) Es ist günstig, die Methode `children()` durch zwei Methoden `leftChild()` und `rightChild()` zur Rückgabe des linken und rechten Kindes zu ersetzen.
2) Die neue Einfügemethode `expandExternal()` setzt voraus, dass der aktuelle Knoten this ein Blatt ist und wandelt ihn durch Anfügen von zwei neuen Blättern in einen inneren Knoten um.
3) Die neue Streichmethode `removeAboveExternal` kann man auch nur für Blätter v verwenden. Um weiterhin einen binären Baum zu erhalten wird mit dem Blatt v auch der Elternknoten u von v gestrichen und an die Stelle von u rückt der Geschwisterknoten v' von v. Diese Operationen sind in der folgenden Abbildung demonstriert:



Die Preorder- und und Postorder-Traversierungen kann man für binäre Bäume durch eine dritte Durchlaufmethode ergänzen, die **Inorder-Traversierungen**. Bei dieser Methode wird immer zuerst der linke Teilbaum, dann die Wurzel und dann der rechte

Teilbaum besucht. Wie schon bei den anderen Traversierungen ergibt sich eine sehr einfache Implementierung, hier der Pseudocode mit v als Parameter:

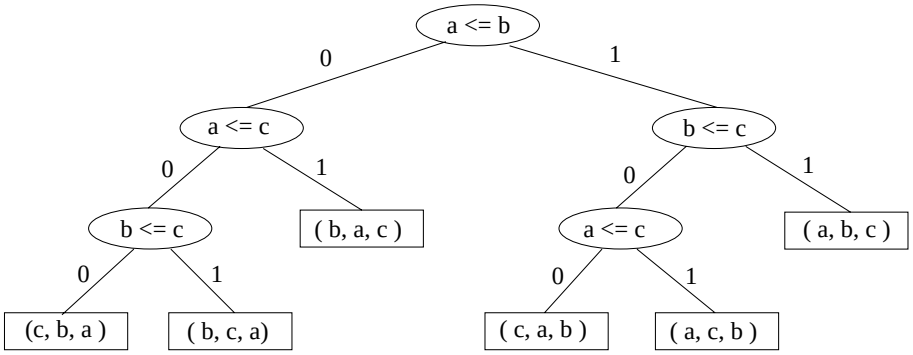
```
inorder(v)
    if(! v.isLeaf()) inorder(v.leftChild());
    visit(v);
    if(! v.isLeaf()) inorder(v.rightChild());
```

Preorder-Traversierungen sind besonders geeignet, um Methoden zur Evaluierung der Knoten eines Baums zu implementieren, bei denen die Werte der Kinderknoten von Werten der Elternknoten abhängen. Das Stadardbeispiel dafür ist die Bewertung der Tiefe aller Knoten eines Baums. Im Gegensatz dazu sind Postorder-Traversierungen besonders für Methoden geeignet, bei denen der Wert des Elternknotens von Werten der Kinderknoten abhängt. Stadardbeispiele dafür sind die Bewertung der Höhe aller Knoten eines Baums oder die Bewertung aller Knoten mit der Größe des von ihnen aufgespannten Unterbaums. Alle genannten Methoden haben lineare Laufzeit.
Die wichtigsten Anwendungen von Inorder-Traversierungen sind mit dem Begriff des binären Suchbaums verbunden:
Ein **binärer Suchbaum** speichert in seinen Knoten Zahlen (oder allgemeiner Objekte aus einer Klasse mit Vergleichsoperation) und hat die Eigenschaft, dass für jeden inneren Knoten v alle Zahlen aus dem linken Unterbaum von v kleiner oder gleich der Zahl in v sind und diese wieder kleiner oder gleich allen Zahlen im rechten Unterbaum von v ist. Für einen binären Suchbaum gibt der Inorder-Durchlauf die geordnete Folge der Zahlen wieder.

Entscheidungsbäume
Entscheidungsbäume dienen zur Klassifizierung von Objekten, wobei die zu unterscheideden Objektklassen (diese können auch aus einem einzelnen Objekt bestehen) in den Blättern liegen. In den inneren Knoten v werden Fragen über das zu klassifizierende Objekt gestellt und in Abhängigkeit von der Antwort wird man zu einem bestimmten Kind von v weitergeleitet. Wenn alle Fragen nur zwei mögliche Antworten 0 oder 1 haben, sprechen wir von einem binären Entscheidungsbaum.
In versteckter Form trifft man Entscheidungsbäume sehr häufig an:

- Unterhaltungsspiele in denen Begriffe oder Personen erraten werden müssen, wobei man nur mit ja oder nein zu beantwortende Fragen stellen darf;
- Bestimmung von Mineralien aus ihren physikalischen Eigenschaften (nicht binär);
- Checkliste zur Fehlerbestimmung bei technischen Geräten;

In der Informatik werden binäre Entscheidungsbäume zur Beschreibung von booleschen Funktionen verwendet (Komplexitätstheorie). Wir beschäftigen uns mit einer anderen Anwendung, der Herleitung von unteren Schranken für vergleichbasierte Sortieralgorithmen. Zum besseren Verständnis der Vorgehensweise beginnen wir mit einem Entscheidungbaum zum Sortieren einer 3-elementigen Folge a, b, c:



Wir betrachten nun einen beliebigen vergleichsbasierten Sortieralgorithmus $\mathcal{A}$. Die Laufzeit $T(n)$ ist definiert als maximale Anzahl der Elementarschritte, die der Algorithmus bei einer Eingabefolge von n Zahlen ausführt. Da das Ziel darin besteht, eine untere Schranke herzuleiten, reicht es aus, die Anzahl der Vergleichsoperationen im schlechtesten Fall abzuschätzen. Es zeigt sich, dass man die Eingabemenge sogar auf alle Folgen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ einschränken kann, die eine Permutation von $(1, 2, \ldots, n)$ sind. Eine Permutation ist eine umkehrbare Abbildung $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ und sie repräsentiert die Eingabe:

$$(a_1 = \pi(1), a_2 = \pi(2), \ldots, a_n = \pi(n)).$$

Da der Algorithmus die sortierte Folge ausgeben soll, muss er in jedem Fall die Umkehrpermutation ausrechnen. Die Ausgabe ist in jedem Fall die sortierte Folge $(1, 2, \ldots, n)$, aber an dieser Stelle ist es wichtig zu verstehen, dass der Algoritmus nicht "wissen" kann, dass er nur mit Testeingaben gefüttert wird, die alle zur gleichen Ausgabe führen. Er muss durch eine Folge von Vergleichen entscheiden, in welcher Reihenfolge die Zahlen aus der jeweiligen Eingabe umzuordnen sind. Mit anderen Worten muss der Algorithmus $\mathcal{A}$ zu jeder Eingabepermutation π die Umkehrpermutation π^{-1} bestimmen, in diesem Sinne gibt es $n!$ verschiedene Ergebnisse.
Wir simulieren die Arbeit von $\mathcal{A}$ durch einen binären Entscheidungsbaum. Wie im Beispiel erzeugt jede Vergleichsoperation (if-Anweisung) eine Verzweigung der Berechnung und in den Blättern befindet sich die jeweils gesuchte Umkehrpermutation. Das tiefste Blatt repräsentiert den schlechtesten Fall einer Eingabe der Länge n. Diese maximale Tiefe (und gleichzeig die Höhe h des Baums) gibt die Anzahl der Vergleichsoperationen bei dieser Eingabe an.
Der Baum hat $n!$ Blätter und aus Satz 2 folgt $n! \leq 2^h$. Das ist äquivalent zu $h \geq \log_2 n!$. Diese Ungleichung kann man von links durch $T(n) \geq h$ ergänzen und von rechts durch $\log_2 n! \in \Theta(n \log_2 n)$. Damit ist die folgende Aussage bewiesen.

Satz: Jeder vergleichsbasierte Sortieralgorithmus hat eine (worst case) Laufzeit von $\Omega(n \log_2 n)$.

Heap-Sort und andere Sortieralgorithmen

Im Zentrum diese Abschnitts steht eine neue Datenstruktur, die Halde (Heap), mit deren Hilfe man einen optimalen Sortieralgorithmus implementieren kann. Zur besseren Einordnung dieses Verfahrens beginnen wir mit einer kurzen Übersicht zu Sortieralgorithmen. Die allgemeine Problemstellung kann man wie folgt beschreiben:
Eingabe: Eine Folge $A = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ der Länge n
Ausgabe: Die sortierte Folge B
Ob die Eingabe in Form eines Arrays oder einer verketteten Liste gegben wird, ist eine zweitrangige Frage, denn man kann jede dieser Strukturen in linearer Zeit in die jeweils andere umwandeln. Folglich hat man für jeden Algorithmus die Wahl, ob er mit Arrays oder mit verketteten Listen implementiert werden soll.
Die Elemente der Folge sind in der Regel Zahlen, die Algorithmen sollten aber auch auf Folgen von Objekten anwendbar sein, für die eine totale Ordnungsrelation definiert ist (eine formale Beschreibung folgt am Ende des Abschnitts). Elemente dürfen in der Eingabefolge mehrfach auftreten, sie müssen in der sortierten Folge auch in der entsprechenden Vielfachheit erscheinen. Die Laufzeit $T(n)$ wird in Abhängigkeit von der Länge der Eingabefolge analysiert und bezieht sich immer auf den schlechtesten Fall.

Insertion-Sort
Man implementiert eine Methode `insert(x)`, die das Element x in eine bereits sortierte Folge an der richtigen Stelle einfügt. Beginnend mit einer leeren Liste B werden die Elemente a_i aus A nacheinander (in der gegebnenen Reihenfolge) mit $B.insert(a_i)$ in B eingefügt. Da die einzelnen Einfügeoperationen nur $O(i)$ Zeit erfordern (egal, ob Array- oder Listenimplementierung), ergibt sich insgesamt die quadratische Laufzeit $T(n) \in O(n^2)$. Für eine bereits sortierte Eingabefolge A, werden auch $0+1+2+\ldots+n-1$ Vergleichoperationen ausgeführt und folglich ist $T(n) \in \Theta(n^2)$.

Selection-Sort
In der Standardimplementierung sehr ähnlich zum Insertion-Sort, mit dem Unterschied, dass der aufwendige Teil in der Auswahl und Löschung des kleinsten Elements aus A (bzw. aus der Restliste von A) besteht und dafür das Einfügen in B in konstanter Zeit erfolgt (einfach anhängen). Auch hier ist $T(n) \in \Theta(n^2)$.

Quick-Sort
Diese Verfahren ist rekursiv definiert. Ein Rekursionschritt besteht darin, die Liste A bezüglich ihres ersten Elements a_1 in die Teillisten $A_l = (a_j | j > 1 \text{ und } a_j < a_1)$ und $A_r = (a_j | j > 1 \text{ und } a_j \geq a_1)$ zu zerlegen und die (rekursiv) sortierten Teillisten durch $B_l + a_1 + B_r$ zusammenzufügen. Die Ausführung eines Rekursionsschritts für eine Liste mit k Elementen erfordert $k-1$ Vergleiche zur Listenaufteilung und $O(k)$ Elementarschritte sind auch immer ausreichend (Konstante abhängig von Array- oder Listenimplementierung). Da man die Rekursionstiefe durch n beschränken kann, ergibt sich $T(n) \in O(n^2)$. Schlechteste Fälle sind sortierte und umgekehrt sortierte Listen, die auch quadratische Laufzeit erzwingen: $T(n) \in \Theta(n^2)$.

Man kann aber zeigen, dass die erwartete Laufzeit für zufällige Eingabelisten $\Theta(n \log n)$ ist. Diese Verbesserung beruht auf der Tatsache, dass bei zufälligen Eingabefolgen beide Teilfolgen mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit nicht zu klein sind (mindestens ein Viertel) und dadurch logarithmische Rekursionstiefe erreicht wird. Das folgende Sortierverfahren erzwingt sogar eine perfekte Teilung in zwei fast gleich große Teilfolgen, dafür muss man beim Zusammensetzen der Teilfolgen einen höheren Aufwand betreiben.

Merge-Sort
Ein Rekursionschritt besteht darin, ein Liste der Länge n in die Teillisten der ersten $\lceil n/2 \rceil$ Elemente und der letzten $\lfloor n/2 \rfloor$ Elemente zu unterteilen und die rekusiv sortierten Teillisten durch eine Merge-Methode zusammenzufügen. Dabei geht man beide Teillisten parallel durch und nimmt das jeweils kleinste noch verfügbare Element in die Ergebnisliste auf.
Die Rekursionstiefe ist $\lceil \log_2 n \rceil$ und die Kosten eines Rekursionsschritts für eine Folge der Länge k sind $c \cdot k \in O(k)$. Aus diesen Fakten kann man $T(n) \in O(n \log n)$ ableiten. Genauer zeigt man induktiv für alle Zweierpotenzen $n = 2^i$, dass $T(n) \leq (c+1) n \log_2 n$ ist. Für den Induktionsanfang reicht die Feststellung, dass man für Folgen der Länge 1 nichts tun muss.
Ist die Behauptung für $n/2$ bereits bewiesen, erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$T(n) \leq \quad cn + T\left(\tfrac{n}{2}\right) + T\left(\tfrac{n}{2}\right) \leq cn + 2 \cdot (c+1) \cdot \tfrac{n}{2} \cdot \log_2 \tfrac{n}{2} \leq$$

$$(c+1) \cdot n + (c+1) \cdot n \cdot (\log_2 n - 1) = (c+1) \cdot n \log_2 n$$

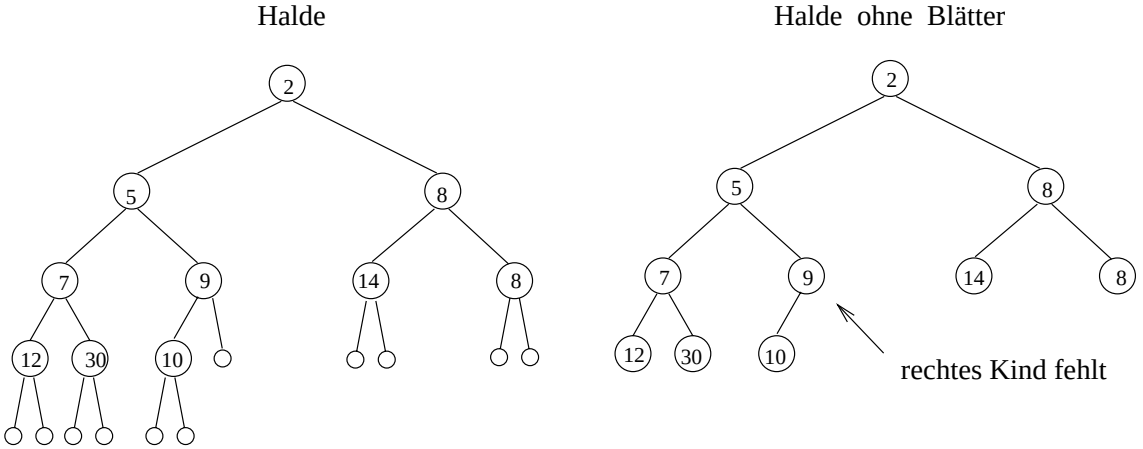
Zahlen n, die keine Zweierpotenz sind kann man einfach durch die nächsthöhere Zweierpotenz $n^{\lceil \log_2 n \rceil} < 2n$ abschätzen: $T(n) \leq 2 \cdot (c+1) \cdot n \cdot \lceil \log_2 n \rceil$. Auf Grund der im letzten Abschnitt abgeleiteten allgemeinen unteren Schranke für Sortieralgorithmen ist $T(n) \in \Theta(n \log n)$.

Counting-Sort
Dieser Algorithmus ist nicht vergleichsbasiert und kann deshalb die allgemeine untere Schranke durchbrechen. Dafür ist der Algorithmus nur unter der Einschr änkung verwendbar, dass alle Elemente der Folge aus einem Bereich $1, 2, 3, \ldots, K$ kommen. Man richtet ein mit Nullen initialisiertes Array C der Länge K ein, durchläuft dann die Eingabefolge $A = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ und erhöht für jedes a_i den Eintrag $C[a_i]$ um 1. Danach durchläuft man das Feld C und wenn man auf einen Eintrag $C[j] > 0$ stößt, wird die Zahl j genau $C[j]$ mal in die Ausgabefolge B eingetragen.
Es gibt nur zwei Schleifendurchläufe, folglich ist die Laufzeit $\Theta(n+K)$. Da es wenig sinnvoll ist, bei Eingabegrßen n, die beliebig anwachsen können, K als konstant anzunehmen, wird K oft als von n abhängige Größe betrachtet. So erreicht man unter der zusätzlichen Voraussetzung $K \in O(n)$ lineare Laufzeit.

Radix-Sort
Auch bei diesem Algorithmus ist die Laufzeitanalyse von mehreren Parametern abhängig. Wir erklären die Idee für das Sortieren von ganzen Zahlen in Dezimalschreibweise. Das Sortieren erfolgt in Runden. In der ersten Runde wird die Folge A durchlaufen und

die Zahlen bezüglich Ihrer letzten Stelle in 10 Folgen $A_0, A_1, \ldots A_9$ eingefügt. Mit der konkatenierten Folge $A_0 + A_1 + \ldots + A_9$ geht man in die zweite Runde in der nach der vorletzten Stelle aufgeteilt und wieder konkateniert wird. In jeder weiteren Runde geht man eine Stelle weiter nach links, also bestimmt die Anzahl d der Dezimalstellen der größten Zahl die Anzahl der Runden. Offensichtlich funktioniert dieses Verfahren, denn nach der i-ten Runde ist die Folge der Zahlen modulo 10^i korrekt sortiert.
Die Laufzeit ist $\Theta(d \cdot n)$. Man kann die Laufzeit reduzieren, indem man in jeder Runde nach zwei, drei oder mehr Dezimalstellen unterteilt, also jeweils in 100, 1000 oder mehr Folgen unterteilt, weil das die Anzahl der Runden halbiert, drittelt, usw. Mit anderen Worten wird die Zahldarstellung von der Basis 10 auf eine andere Basis $k = 100, 1000, \ldots$ umgestellt. Man muss aber dabei beachten, dass dann auch die Konkatenation k Schritte erfordert., was zu einer Laufzeit von $\Theta(d_k \cdot (n + k))$ führt, wobei $d_k = \lceil \log_k max \rceil$ die Stelligkeit der größten Zahl aus der Folge bezüglich der Basis k ist. Durch geschickte Parameteranpassung kann man viele Folgen in linearer Zeit sortieren, die bei Counting-Sort quadratische Laufzeit oder mehr erfordern würden.
Beispiel: Für eine Folge von n Zahlen aus dem Bereich $1, 2, \ldots, n^3$ benötigt Counting-Sort $\Theta(n^3)$ Zeit. Mit $k = 10^{\lceil \log_{10} n \rceil}$ erreicht Radix-Sort lineare Laufzeit $\Theta(n)$.

Heap-Sort
Grundlage für dieses Sortierverfahren ist eine spezielle Datenstruktur, durch deren Verwendung man optimale Laufzeit erreicht.
Definition: Eine **Halde (Heap)** ist ein binärer Baum in dessen inneren Knoten Zahlen gespeichert sind und der die fogenden zwei Eigenschaften hat:
Heap-Ordnungseigenschaft: Für jeden inneren Knoten v ist seine Zahl kleiner oder gleich den Zahlen in den Kindern von v (sofern diese Kinder keine Blätter sind).
Heap-Vollständigkeitseigenschaft: Ist h die Höhe der Halde, so sind alle Level von 0 bis $k-1$ vollständig gefüllt und die Knoten im letzten Level sind linksbündig angeordnet.

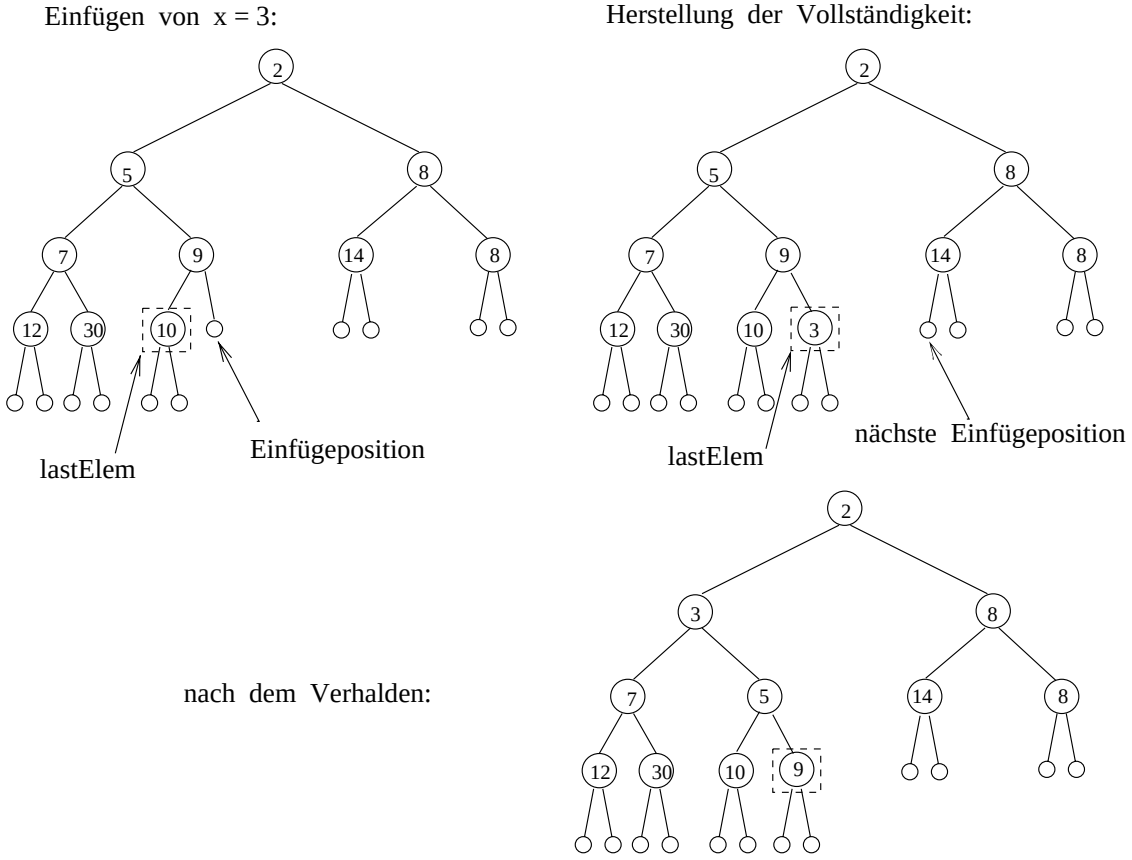


Die Vollständigkeitseigenschaft beschreibt also die äussere Gestalt einer Halde. Da die Blätter keine Informationen tragen, sind sie nur Platzhalter, um Halden in unser

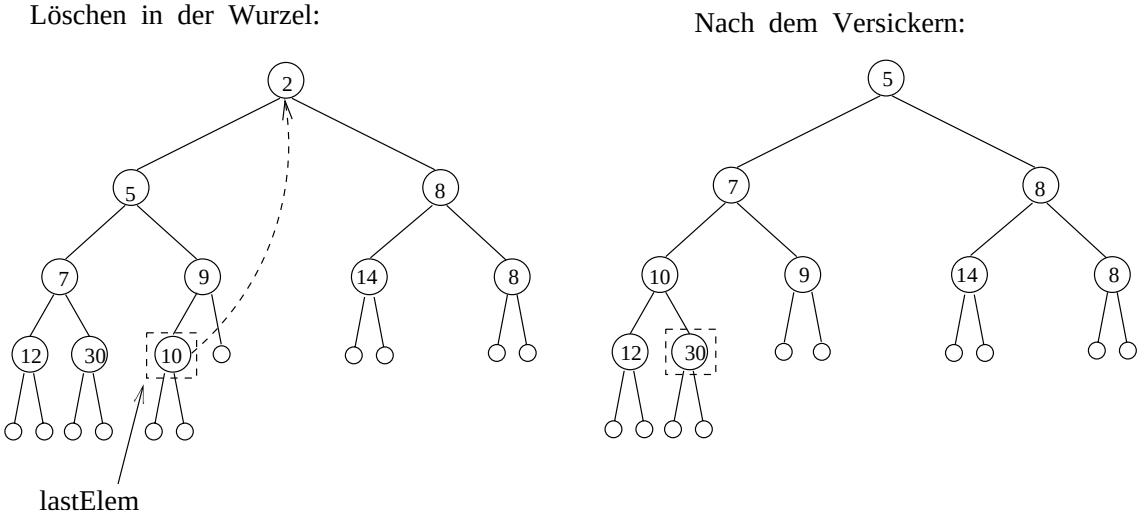
Konzept von binären Bäumen zu integrieren und zur Unterstützung einiger Algorithmen. Zur Vereinfachung von Beispielzeichnungen kann man auch auf die Blätter verzichten. Wegen der Ordnungseigenschaft muss die kleinste Zahl immer in der Wurzel gespeichert sein und daraus resultiert die Idee zu einem zweistufigen Sortieralgorithmus:
1) Bilde eine Halde in der alle Zahlen aus der zu sortierenden Folge gespeichert sind.
2) Wiederhole die folgende Prozedur bis die Halde leer ist:
   Lösche die Zahl aus der Wurzel, füge sie in die sortierte Folge ein und rekonstruiere eine Halde aus den restlichen Zahlen.

Zur Umsetzung benötigt man Einfüge- und Löschoperationen, für die neben der üblichen Baumstruktur der am weitesten rechts stehende innere Knoten aus dem vorletzten Level wichtig ist. Wir bezeichnen ihn mit `lastElem`.

Einfügen einer Zahl x**:** Man bestimmt zuerst die Einfügeposition, indem man von `lastElem` den nach oben startenden Weg der Euler-Tour bis zum nächsten Blatt folgt. Das ist gleichzeitig das erste Blatt, dass bei der (zyklischen) Inorder-Traversierung auf `lastElem.rightChild()` folgt. Durch Anhängen von zwei Blättern wird dieses Blatt in einen inneren Knoten verwandelt und als neues `lastElem` gesetzt. Damit ist die Vollständigkeitseigenschaft erfüllt. Dann wird x in die Einfügeposition eingetragen und bis zur Herstellung der Ordnungseigenschaft schrittweise nach oben vertauscht. Man nennt diese Prozedur Verhalden (Up-Heap Bubbling).



Löschen der Zahl aus der Wurzel: Das Löschen ist trivial, aber zur Rekonstruktion einer Halde ist noch einiges zu tun. Die Zahl y aus `lastElem` wird in die Wurzel verschoben, die Blätter von `lastElem` gestrichen und `lastElem` zurückgesetzt (umgekehrt wie beim Einfügen). Zur Wiederherstellung wird y so lange nach unten getauscht, wie ein Kind unter der aktuellen Position von y eine kleinere Zahl speichert. Halten beide Kinder eine kleinere Zahl als y, entscheidet man sich für die kleinere von beiden. Man nennt diese Prozedur Versickern (Down-Heap Bubbling).



Laufzeitanalyse: Offensichtlich kann jede Einfüge- und Löschoperation in $O(h)$ Zeit ausgeführt werden, wobei h die Höhe (Tiefe) der aktuellen Halde ist. Da man zum Sortieren einer Folge der Länge n genau n Einfüge- und n Löschoperationen ausgeführt werden und nach folgenden Satz $h \in O(\log n)$ gilt, ist $T(n) \in O(n \log n)$.

Satz: Die Höhe einer Halde, die n Zahlen speichert, ist $h = \lceil \log_2 (n+1) \rceil$.
Beweis: Aus der Vollständigkeitseigenschaft folgt, dass die Level i von 0 bis $h-2$ jeweils 2^i und Level $h-1$ mindestens einen und höchstens 2^{h-1} innere Knoten haben:

$$\begin{array}{rcccl} 1+2+4+\ldots+2^{h-2}+1 & \leq & n & \leq & 1+2+4+\ldots+2^{h-2}+2^{h-1} \\ 2^{h-1} & \leq & n & \leq & 2^h-1 \\ 2^{h-1}+1 & \leq & n+1 & \leq & 2^h \\ h-1 < \log_2 (2^{h-1}+1) & \leq & \log_2 (n+1) & \leq & \log_2 2^h = h \end{array}$$

Damit ist $\lceil \log_2 (n+1) \rceil = h$. □

Die erste Stufe von Heap-Sort kann durch eine sogenannte Bottom-Up-Heapkonstruktion weiter verbessert werden. Zur Vereinfachung wird diese Idee nur für Zahlen der Form $n = 2^h - 1$ erläutert. Man nimmt 2^{h-1} dieser Zahlen und baut mit jeder eine Halde der Höhe 1 mit der Zahl in der Wurzel. Man bildet aus diesen Halden 2^{h-2} Paare. Aus jedem

Paar wird eine neue Halde gebildet und in die Wurzel wird eine von den verbliebenen Zahlen gesetzt, die versickert werden muss. Das wird rekursiv wiederholt, bis im letzten Schritt eine Halde mit allen $n = 2^h - 1$ Zahlen entstanden ist.

Satz: Die Bottom-Up-Heapkonstruktion erfordert nur lineare Zeit.
Beweis: Es genügt die Anzahl der Vertauschungen abzuschätzen. Der erste Schritt kommt ohne Vertauschungen aus, für die nächsten 2^{h-2} Zahlen reicht eine Vertauschung, es folgen 2^{h-3} Zahlen mit zwei Vertauschungen, im letzten Schritt braucht man maximal $h-1$ Tauschoperationen. Durch geeignetes Zusammenfassen, umformen und Verwendung der Summenformel für geometrische Reihen erhält man:

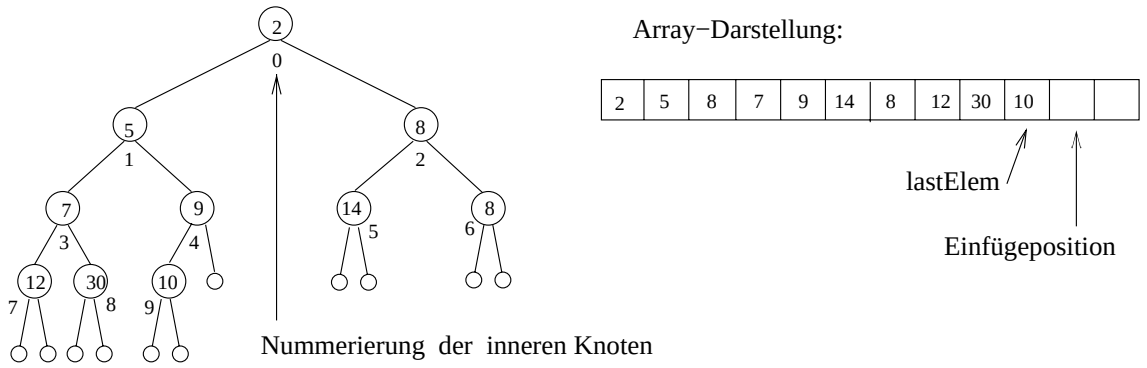
$$1 \cdot 2^{h-2} + 2 \cdot 2^{h-3} + \ldots + (h-1) \cdot 2^0 = \sum_{i=1}^{h-1} \sum_{j=i}^{h-1} 2^{h-1-j} = 2^h \sum_{i=1}^{h-1} (2^{-i} - 2^{-h}) \leq n \cdot \sum_{i=1}^{h-1} 2^{-i} \leq n$$

Es gibt einen zweiten Beweis in Form einer Gewinn-Verlustrechnung. Die Rechnung wird wesentlich einfacher, aber formal muss man vollständige Induktion anwenden. Wir gehen davon aus, das für $n = 2^h - 1$ alle Zahlen in den Levels 0 bis $h-2$ ein Guthaben von zwei Euro bekommen. Für jede Austauschoperation muss ein Euro bezahlt werden. Wir zeigen, dass am Ende immer mindestens $h-1$ Euro übrig bleiben. Damit kann man die Anzahl der Tauschoperationen mit $2 \cdot (2^{h-1} - 1)) - (h-1) = n - h$ abschätzen.
Induktionsanfang:
Das ist offensichtlich richtig für $h = 1$ (kein Guthaben, aber wenn nur in der Wurzel eine Zahl steht muss nicht getauscht werden und das Restguthaben ist $0 = 1 - 1$) und für $h = 2$ (Anfangsguthaben 2 Euro und maximal ein Austausch).
Induktionsschritt von h zu $h+1$:
Wir betrachten die Halde, die nach Bottom-Up-Konstruktion für eine Folge aus $2^{h+1} - 1$ Zahlen entsteht. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es im linken und im rechten Teilbaum jeweils ein Restguthaben von mindestens $h-1$ Euro. Zusammen mit den 2 Euro der Wurzel sind das $2h$ Euro. Da man die Zahl aus der Wurzel im schlechtesten Fall bis zum Level h versickern muss, bleiben am Ende mindestens $h = (h+1) - 1$ Euro übrig. □

Es bleibt anzumerken, dass es keine Chance gibt, auch die zweite Phase des Heap-Sorts in linearen Zeit zu realisieren, denn das stünde im Widerspruch zur allgemeinen unteren Schranke für Sortieralgorithmen.

Array-Implementierung für Halden
Bisher sind wir, auch um die anschauliche Intuition zu unterstützen, davon ausgegeangen, dass man Halden als binäre Bäume implementiert. Man kann Halden aber auch sehr einfach mit Feldern implementieren:
Die Level werden nacheinander (von 0 beginnend) und jedes einzelne Level von links nach rechts in das Array übertragen. Also steht in $A[0]$ der Wert aus der Wurzel in $A[1]$ und $A[2]$ die Werte des linken und rechten Kindes der Wurzel u.s.w.
Das hat den Vorteil, dass lastElem immer am Ende steht und die erste freie Zelle die Einfügeposition darstellt. Zum Einfügen und Löschen ist aber auch die Baumstruktur sehr wichtig. Sie ist nicht ganz offensichtlich, aber bei genauerer Betrachtung findet

man heraus, dass die Kinder des von $A[i]$ repräsentierten Knotens von $A[2i+1]$ und $A[2a+2]$ repräsentiert werden. Damit ist es auch leicht den Vaterknoten zu bestimmen: Für ungerade j geht man nach $\frac{j-1}{2}$ und für gerade j nach $\frac{j-2}{2}$.



Die Halden-Datenstruktur ist nicht nur zum Sortieren geeignet, man kann sie auch sehr gut zur Implementierung von **Prioritäts-Warteschlangen (Priority-Queue)** verwenden. Solche Warteschlangen verwalten Objekte mit einem Schüssel, wobei die Schlüssel von einem Datentyp sind für den ein Vergleichsoperator $\leq$ definiert ist (im einfachsten Fall sind es Zahlen). Der Vergleichsoperator muss die folgenden vier Eigenschaften haben:

1. **total**, d.h. für beliebige Schlüssel a, b muss $a \leq b$ oder $b \leq a$ gelten;
2. **reflexiv**, d.h. für jeden Schlüssel a gilt $a \leq a$;
3. **transitiv**, d.h. für beliebige Schlüssel a, b, c gilt: aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$;
4. **antisymmetrisch**, d.h. für beliebeige Schlüssel a, b gilt: aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $a = b$;

Eine Prioritäts-Warteschlange zeichnet sich dadurch aus, dass man jederzeit beliebige Objekte mit Schlüssel einfügen kann und dass sie jederzeit das Objekt mit dem kleinsten Schlüssel zur Verfügung stellen und löschen kann. Das FIFO-Prinzip wird also durch die höchste Priorität (gleich kleinster Schlüssel) ersetzt.
Prioritäts-Warteschlangen können auch mit Arrays oder verketteten Listen implementiert werden, aber dann benötigt eine Opertationsart lineare Zeit und die andere konstante Zeit. Die Heap-Implementierung mit logarithmischer Zeit für beide Operationen ist wesentlich effizienter.

Wörterbücher (Dictonaries) und ihre Implementierungen

Auch in diesem Abschnitt geht es um die Verwaltung von Objekten mit einem Schlüssel. Wir nennen die aus einem Objekt (Element) und einem Schüssel bestehende Einheit einen **Eintrag** (`Item`). Ziel ist die Konstruktion einer Datenstruktur zur Verwaltung von Items, die über Methoden zum Einfügen und Löschen von Items verfügt und in der man Items nach ihrem Schlüssel suchen kann. Solche Datenstrukturen spielen in verschiedensten Anwendungen eine wichtige Rolle:

Lexikon (Schüssel = Suchbegriff, Objekt = Erklärung)
Telefonbuch (Schlüssel = Teilnehmer, Objekt = Telefonnummer)
Kundendatei (Schlüssel = Kundennummer, Objekt = Kundendaten)

Man kann hier auch auf die Forderung verzichten, dass die Schlüsselmenge total geordnet (siehe Priority Queues) sein soll, und spricht dann von ungeordneten Wörterbüchern. Wir werden uns aber nur mit dem geordneten Fall beschäftigen.

Im Einzelnen sollte ein Wörterbücher die folgenden Methoden implementieren:

```
int      size()
Object   findElement(key k)
Object[] findAllElements(key k)
Object   insertItem(key k,Object e)
Object   removeElement(key k)
Object[] removeAllElements(key k)
```

Auch für Wörterbücher bieten sich die bereits mehrfach besprochenen Implementierungen mit Arrays oder mit doppelt verketteten Listen an. Da bei Listenimplementierungen (geornet und ungeordnet) sowie bei der Implementierung mit ungeordneten Feldern schon für das Suchen lineare Zeit erforderlich ist (bei Listen kann man dafür danach in konstanter Zeit einfügen und löschen), sollte man sie nur für kleine Datenmengen verwenden.
Dagegen haben geordnete Felder den Vorteil, das man Schlüssel mit **binärer Suche** in logarithmischer Zeit finden kann. Zur Beschreibung dieser Methode bezeichnen wir mit low und $high$ zwei Indizes, die ein Intervall in einem Feld A eingrenzen, in dem der Schlüssel k gefunden werden soll. Zur Vereinfachung bezeichnen wir mit $key(i)$ den Schlüssel des Eintrags an der i-ten Stelle im Feld. Die binäre Suche nach k ist rekursiv definiert. Der Pseudocode ist so zu verstehen, dass jede return-Anweisung die Methode sofort beendet:

```
while (low ≤ high)
        mid = ⌊(low+high)/2⌋
        if (k == key(mid))    return elem(mid)
            else if (k < key(mid))  high = mid − 1
                 else  low = mid + 1
return NO_SUCH_KEY
```

Wenn man also eine (weitgehend) statische Datenstruktur entwerfen will, in der nach einer längeren Vorverarbeitungsphase nur gesucht werden soll (ohne sie zu aktualisieren), ist ein geordnetes Feld die geeignetste Datenstruktur. Leider wird dieser Vorteil bei dynamischen Strukturen durch lineare Einfüge- und Löschzeiten wieder eingebüßt.

Binäre Suchbäume als Wörterbücher

Zur Implementierung von Wörterbüchern verwenden wir binäre Suchbäume, bei denen nur die inneren Knoten Einträge (items) tragen. Zur Suche eines Eintrags mit Schlüssel k wird die eine rekursive Methode `TreeSearch(k,v)` implementiert, die entweder einen inneren Knoten mit Schlüssel k oder ein Blatt zurückgibt, das für den Fall `NO_SUCH_KEY` steht.

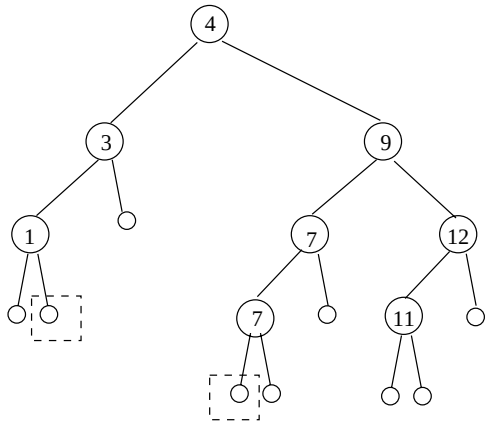
```
TreeSearch (k, v) {
        if (v Blatt) return v
        else if (k == key(v)) return v
               else if (k < key(v)) return TreeSearch (k, leftChild(v))
                      else return TreeSearch (k, rightChild(v))
}
```

Die Laufzeit dieser Suchmethode ist $O(h)$ wobei h die Höhe von v ist, bei Aufruf mit der Wurzel ist es die Höhe des Baums. Auch das Einfügen und Löschen lässt sich nach folgenden Regeln in dieser Zeit realisieren.

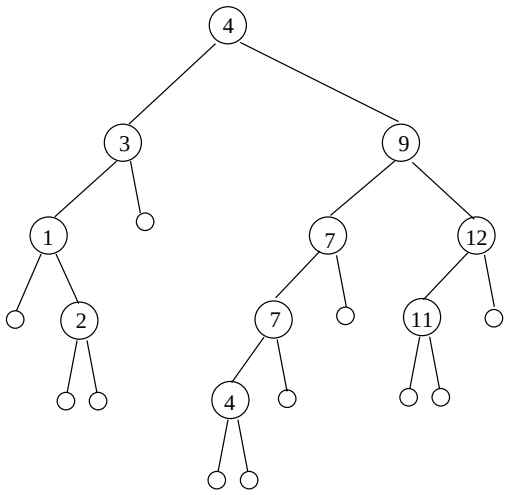
Einfügen eines Eintrags $item(k, e)$**:**

1) $v =$ `TreeSearch` $(k, root)$
2.a) Ist v ein Blatt, so werden 2 Blätter angefügt und (k, e) in v eingetragen
2.b) Ist v ein innerer Knoten, sei w der erste Knoten bei der Inorder-Traversierung von `rightChild`(v). Achtung: w ist ein Blatt! Dann wird (k, e) in w eingetragen und zwei Blätter angefügt.

Suchbaum mit Einfügepositionen für die Schlüssel 2 und 4



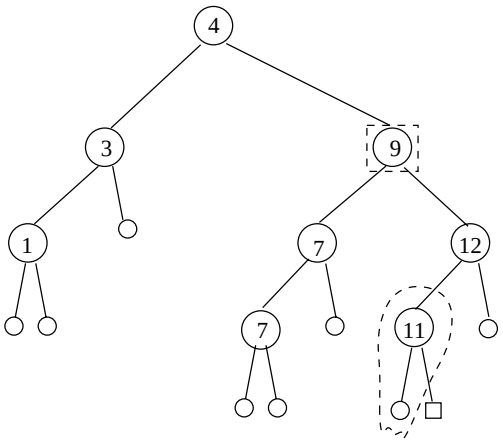
Nach dem Einfügen



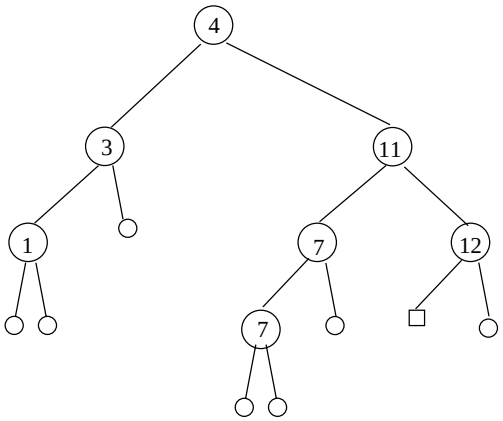
Löschen eines Eintrags mit Schlüssel k:

1) $v =$ `TreeSearch` $(k, root)$
2.a) Ist v ein Blatt, gibt es keinen Eintrag mit Schlüssel $k \mapsto$ `NO_SUCH_KEY`
2.b) Ist v ein innerer Knoten, sei w der erste Knoten bei der Inorder-Traversierung von `rightChild`(v) und u der Vaterknoten von w. Die Einträge von v und u werden vertauscht. Dann löscht man die Knoten u und w und der Geschwisterknoten von w wird an die Stelle von u gesetzt.

Suchposition und Löschpositionen den Schlüssel 9



Nach Austausch der Einträge und Löschung



Das nächste Ziel besteht darin, spezielle Suchbaumfamilien zu entwerfen, die logarithmische Höhe garantieren und diese Eigenschaft auch bei Einfüge- und Löschoperationen behalten. Es gibt dazu eine Reihe von Lösungen, aus der wir nur die sogenannten AVL-Bäume näher betrachten werden.

AVL-Bäume

Definition: Ein binärer Baum hat die **Höhen-Balance-Eigenschaft**, wenn für jeden inneren Knoten v die Höhendifferenz des linken und des rechten Kindes von v höchstens 1 ist. Wir verwenden für die Höhen-Balance-Eigenschaft die Abkürzung **HBE**. Wenn der von dem Knoten v bestimmte Unterbaum $T(v)$ die HBE hat, sprechen wir auch davon, dass v die HBE hat.
Definition: Ein **AVL-Baum** ist ein binärer Suchbaum (mit Einträgen in den inneren Knoten), der die HBE besitzt.

Satz: Ein AVL-Baum mit n Einträgen hat die Höhe $O(\log n)$.
Beweis: Wir betrachten das Problem zuerst von der anderen Seite und bezeichnen mit $n(h)$ die minimale Anzahl von inneren Knoten, die ein AVL-Baum der Höhe h haben muss. Offensichtlich ist $n(1) = 1$ und $n(2) = 2$. Allgemein muss in jedem AVL-Baum der Höhe h mindestens ein Kind der Wurzel die Höhe $h - 1$ haben. Wegen der Höhen-Balance muss dann das andere Kind mindestens die Höhe $h - 2$ haben. Berücksichtigt

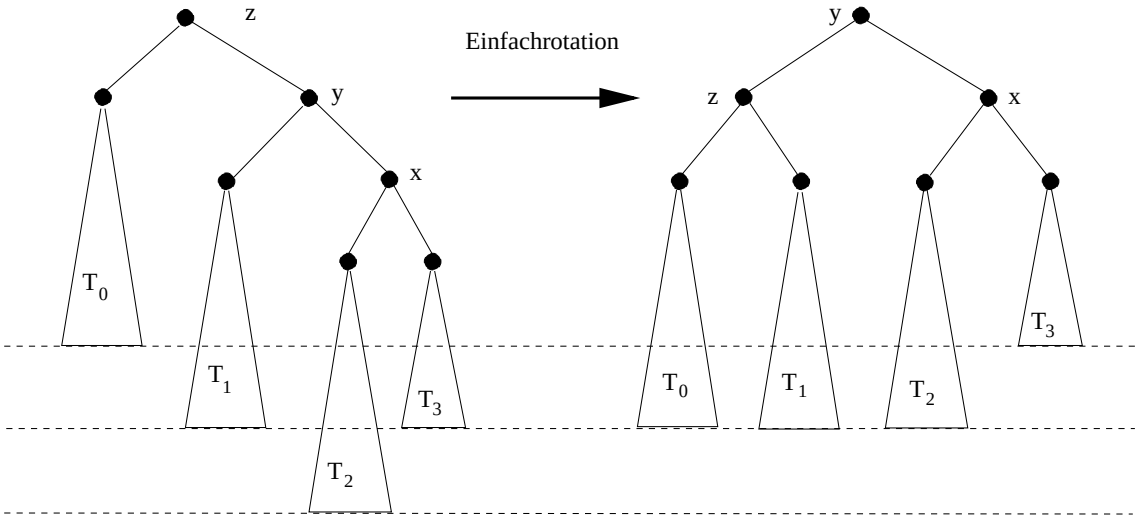
man die Wurzel als weiteren inneren Knoten, so erhält man:

$$n(h) \geq 1 + n(h-1) + n(h-2) > 2n(h-2) \geq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n(1) = 2^{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}$$

Durch Logarithmieren ergibt sich $\lfloor \frac{h}{2} \rfloor \leq \log_2 n(h)$, woraus die Behauptung folgt.

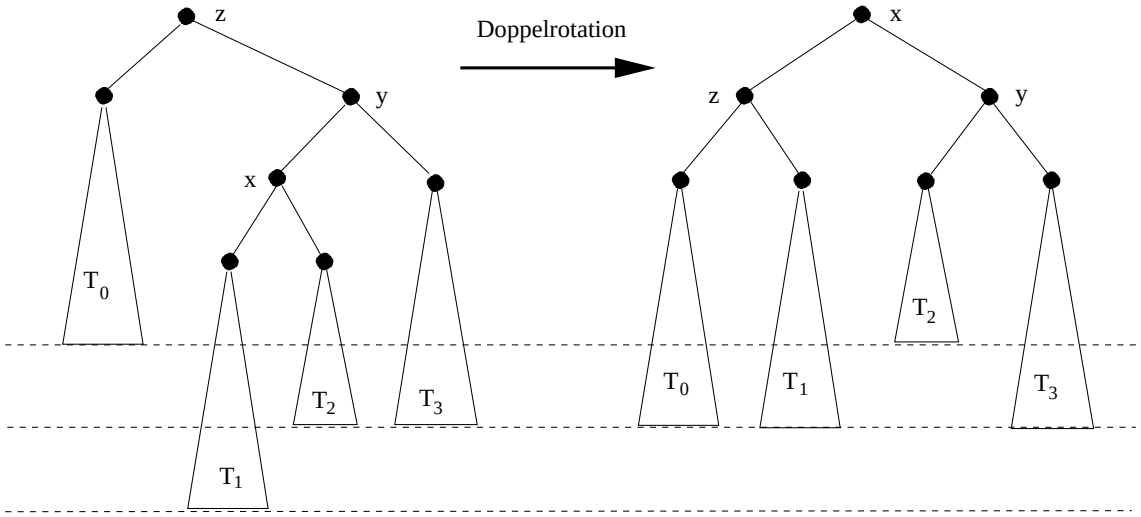
Aus diesem Satz folgt, dass Einfüge- und Löschoperationen in AVL-Bäumen in logarithmischer Zeit arbeiten. Es kann aber sein, dass eine solche Operation die HBE zerstört und deshalb müssen auch die Kosten für die Wiederherstellung dieser Eigenschaft auf die Operationen angerechnet werden. Zur Rekonstruktion von AVL-Bäumen nutzt man sogenannte Rotationen. Das sind Operationen, die lokal die Struktur eines Baums (insbesondere die Höhenverhältnisse) verändert. Es gibt zwei Grundtypen. Sie werden **einfache Rotation** und **doppelte Rotation** genannt und sind in den folgenden Abbildungen illustriert.
In beiden Fällen geht man davon aus, dass z ein tiefster Knoten ohne HBE ist. Wir bezeichnen die Höhe von z mit $h = h(z)$, das Kind und das Enkelkind auf dem längsten Weg von z zu einem Blatt mit y und x. Durch die Auswahl von z müssen x und y die HBE haben und es gilt $h(x) = h(y) - 1 = h - 2$. Wir setzen außerdem voraus, dass der Geschwisterknoten von y (also das zweite Kind von z) die Höhe $h - 2$ hat.

Einfache Rotation Um diese Rotationen anwenden zu können, müssen y und x jeweils linke oder jeweils rechte Kinder sein. In diesem Fall kann man $T(z)$ so verändern, dass y zur Wurzel wird mit den Kindern z und x. Das ursprüngliche Geschwisterkind von x wechselt als Kind zu z. Im Ergebnis hat der neue Baum $T'(y)$ die HBE und seine Höhe hat sich auf $h - 1$ reduziert. Wenn man die Reihenfolge der Teilbäume $T_0, \ldots T_3$ von links nach rechts (siehe Abbildung) nicht ändert, bleibt auch die Suchbaum-Ordnung erhalten.



Doppelte Rotation Um diese Rotationen anwenden zu können, muss y ein rechtes und x ein linkes Kind sein oder umgekehrt. In diesem Fall kann man $T(z)$ so verändern, dass

x zur Wurzel wird mit den Kindern y und z. Ein Kind von x wechselt zu y, das andere zu z. Damit wird die HBE hergestellt und die Höhe des Baums auf $h-1$ reduziert. Die Zuordnung der Kinder von x auf y und z muss wieder so erfolgen, dass durch Einhaltung der Reihenfolge von $T_0, \ldots T_3$ die Suchbaum-Ordnung erhalten bleibt.



Da eine Rotation (egal, ob einfach oder doppelt) nur eine lokale Operation ist, die man durch eine konstante Anzahl von Referenzverschiebungen realisieren kann, verbraucht sie auch nur $O(1)$ Zeit. Um diese Operationen aber effizient zur Wiederherstellung der HBE nach einer Einfüge- oder Löschoperation einsetzen zu können, müssen alle Knoten des AVL-Baums ihrer Höhe kennen. Da beide Operationen nur die Höhe der Knoten auf dem Weg p von der Einfge- bzw. Löschposition zur Wurzel verändern können, kostet die Aktualisierung nur $O(\log n)$ Zeit (wenn man auf dem Weg p zum ersten Mal einen Knoten betritt, dessen Höhe sich nicht ändert, kann man auch abbrechen). Bei dieser Aktualisierung wird gleichzeitig die HBE der Knoten überprüft (einfach Höhen der Kinder vergleichen). Wenn man auf einen Knoten ohne HBE stößt, wird die passende Rotation angewendet. Dabei ist auf einen grundlegenden Unterschied zwischen Einfüge- oder Löschoperationen zu achten:

Durch eine **Einfügeoperation** kann sich die Höhe nur vergrößern, d.h. die zu rotierenden Knoten x, y, z liegen auf dem Weg p. Da sich nach der ersten Rotation die (vergrößerte) Höhe wieder um 1 reduziert, ist man fertig.

Durch eine **Löschoperation** kann sich die Höhe nur verkleinern, d.h. man trifft aus dem Teilbaum mit der geringeren Höhe kommend auf z, und muss y und x in dem anderen Teilbaum suchen. Da sich die Höhe des rotierten Teilbaums verringert, kann es sein, dass auf dem weitern Weg zur Wurzel neue Rotationen notwendig werden. In jeden Fall reichen aber $O(\log n)$ Rotationen aus.

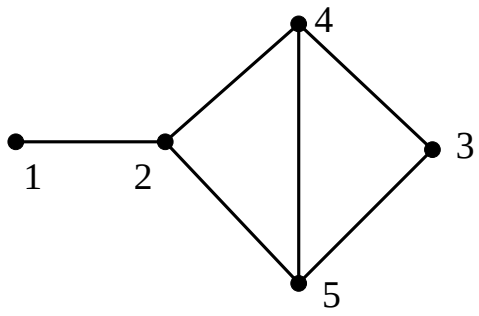
Satz: Bei der Implementierung des Wörterbuch-ADTs mit AVL-Bäumen haben Such-, Einfüge- und Löschoperationen eine Laufzeit von $O(\log n)$.

Graphen und ihre Darstellungen

Ein **Graph** beschreibt Beziehungen zwischen den Elementen einer Menge von Objekten. Die Objekte werden als Knoten des Graphen bezeichnet; besteht zwischen zwei Knoten eine Beziehung, so sagen wir, dass es zwischen ihnen eine Kante gibt.
Definition: Für eine Menge V bezeichne $\binom{V}{2}$ die Menge aller zweielementigen Untermengen von V. Ein **einfacher, ungerichteter Graph** $G = (V, E)$ (kurz **Graph** genannt) besteht aus einer endlichen Menge V von **Knoten** , auch **Ecken (Vertex)** genannt, und einer Menge $E \subseteq \binom{V}{2}$ von **Kanten (Edge)**. Hier sind Kanten ungeordnete Paare von Knoten, d.h. $\{u, v\}$ und $\{v, u\}$ sind zwei verschiedene Schreibweisen für ein und dieselbe Kante. Im Gegensatz dazu ist endlicher **gerichteter Graph** G ein Paar (V, E) bestehend aus einer endlichen Knotenmenge V und einer Kantenmenge E von geordneten Knotenpaaren $e = (u, v)$, mit $u, v \in V$.

Ist $e = \{u, v\}$ eine Kante von G, dann nennt man die Knotenen u und v zueinander **adjazent** oder **benachbart** und man nennt sie **inzident** zu e. Die Menge $N(v) = \{u \in V \,|\, \{u, v\} \in E\}$ der zu einem Knoten v benachbarten Knoten wird die **Nachbarschaft** von v genannt. Der **Grad** eines Knotens v wird durch $deg(v) = |N(v)|$ definiert.
Die Anzahl der Knoten $|V|$ bestimmt die **Ordnung** und die Anzahl der Kanten $|E|$ die **Größe** eines Graphen.

Im Folgenden werden verschiedene Darstellungen von Graphen an einem Beispiel demonstriert.
1) Darstellung als Zeichnung:



2) Darstellung als **Adjazenzmatrix**. Jedem Knoten wird eine Zeile und eine Spalte zugeordnet und der Eintrag in der Zeile von u und der Spalte von v wird 1 gesetzt, wenn $\{u, v\}$ eine Kante des Graphen ist (sonst 0):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Während die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen symmetrisch ist (Diagonale als Symmetrieachse) sind Adjazenzmatrizen von gerichteten Graphen im allgemeinen nicht symmetrisch. Durch Verwendung beliebiger Zahlen für die einzelnen Einträge kann man auch Graphen mit Kantenbewertungen darstellen.

3) Darstellung als **Adjazenzliste**. Für jeden Knoten wird die Liste seiner Nachbarn angegeben (Liste von Listen):
$1:2;\ 2:1,4,5;\ 3:4,5;\ 4:2,3,5;\ 5:2,3,4$; oder mit anderer Syntax
$(2),(1,4,5),(4,5),(2,3,5),(2,3,4)$

4) Darstellung als **Inzidenzmatrix**. Jedem Knoten wird eine Zeile und jeder Kante eine Spalte zugeordnet und der Eintrag in der Zeile von u und der Spalte von e wird 1 gesetzt, wenn u eine Ecke der Kante e ist (sonst 0):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Darstellung mit Inzidenzmatrizen hat sich zwar für verschiedene theoretische Betrachtungen als nützlich erwiesen, ist aber für algorithmische Anwendungen eher ungeeignet. Ob man sich bei der Beschreibung und Implementierung von Graphalgorithmen für Adjazenzlisten oder für Adjazenzmatrizen entscheiden sollte, hängt zum einen von den Eigenschaften der zu bearbeitenden Graphen ab (oft werden Algorithmen für spezielle Graphklassen entwickelt), zum anderen von der Art der Zugriffe, die der Algorithmus vornehmen muss. Folgende Aspekte sind dabei zu beachten:

1) Speicherverbrauch Die Adjazenzmatrix verbraucht für Graphen mit n Knoten $\Theta(n^2)$ Speicher, unabhängig von der Größe $m = |E|$ des Graphen. Dagegen ist der Speicherbedarf einer Adjazenzliste nur $\Theta(n+m)$ oder sogar $\Theta(m)$, wenn man leere Nachbarschaftslisten einfach ignoriert. Da für planare Graphen oder Graphen mit beschränktem Grad $m = O(n)$ gilt, reduziert sich der Speicherbedarf auf $O(n)$.

2) Anfragezeit Häufig wird in Graphalgorithmen die Frage, ob zwei bestimmte Knoten adjazent sind, als Entscheidungsgrundlage für das weitere Vorgehen verwendet. Eine solche Abfrage kann mit der Adjazenzmatrix in konstanter Zeit beantwortet werden, bei Adjazenzlisten erhöht sich der Aufwand je nach Implementierung auf $\Theta(n)$ (Listen der Nachbarn ungeordnet) oder $\Theta(\log n)$ (geordnete Arrays mit Binärsuche oder AVL-Bäume).

3) Updates Das Einfügen und Streichen von Kanten erfolgt bei Adjazenzmatrizen in linearer Zeit, bei Adazenzlisten in linearer Zeit (oder in logarithmischer Zeit bei Verwendung vvon AVL-Bäumen oder ähnlichen Strukturen).

4) Nachbarschaftsaufzählung Um einen Nachbarn eines gegebenen Knoten zu erhalten sind die Adjazenzlisten mit konstanter Zeit (bzw. Zeit $O(l)$ für die Liste aller l Nachbarn) im Vorteil gegen $\Theta(n)$ bei Adjazenzmatrizen.

Da Graphen über eine sehr einfache Struktur verfügen, finden sie bei der Modellierung und algorithmischen Lösung vieler praktischer Probleme Anwendung, wie z.B.

- Modellierung von Straßen-, Flug- und Telefonnetzen
- Darstellung von Molekülen
- Interpretation von Relationen (Beziehungsgeflechten)
- Gerüste von Polyedern (lineare Optimierung)
- Entwurf von Mikrochips (VLSI-Design)

Die folgenden Beispiele für graphentheoretische Aufgabenstellungen haben die die Entwicklung der Graphentheorie stark beeinflusst und unterstreichen die praktische Relevanz dieser Struktur:

1) 4-Farben-Problem: Man stelle sich die Welt mit einer beliebigen politischen Landkarte vor. Wir definieren einen Graphen, indem wir jedem Land einen Knoten zuordnen und zwei Knoten mit einer Kante verbinden, wenn sie einen gemeinsamen Grenzabschnitt haben. Wie viele Farben braucht man, um die Länder so einzufärben, dass benachbarte Länder verschiedene Farben haben. Man hat (mit Computerhilfe) bewiesen, dass vier Farben immer ausreichen! Einen Beweis ohne Computer gibt es bis heute nicht.

2) Eulersche Graphen: Man charakterisiere jene Graphen, bei denen man die Kanten so durchlaufen kann, dass man jede Kante einmal benutzt und man am Schluss wieder am Ausgangspunkt steht. ("Haus vom Nikolaus"-Prizip). Der Ausgangspunkt für diese Frage war das von Euler gelöste sogenannte Königsberger Brückenproblem.

3) Hamiltonsche Graphen: Dies sind solche Graphen, die man so durchlaufen kann, dass man jeden Knoten genau einmal besucht bis man zum Ausgangsknoten zurückkehrt. Während man für das vorherige Problem effiziente algorithmische Lösungen kennt, ist dieses algorithmisch schwer (NP-vollständig).

4) Travelling Salesman Problem (TSP): Oft hat man es mit bewerteten Graphen zu tun, das heißt Kanten und/oder Knoten haben zusätzliche Informationen wie Gewichte, Längen, Farben etc.
Ein Beispiel ist das TSP. Wir haben n Städte. Für jedes Paar $\{u, v\}$ von Städten kennt man die Kosten, um von u nach v zu kommen. Man entwerfe für den Handelsreisenden eine geschlossene Tour, die alle Städte besucht und minimale Gesamtkosten hat. Auch dies ist ein algorithmisch schweres Problem.

5) Planare Graphen: Welche Graphen lassen sich so in der Ebene zeichnen, dass sich Kanten nicht schneiden, also sich höchstens in Knoten berühren? Wie kann man sie charakterisieren und algorithmisch schnell erkennen?

6) Flussprobleme: Angenommen ein (Informations)-Netzwerk wird durch einen Graphen mit Kantenbewertung beschrieben, wobei diese Werte eine Obergrenze für die Übertragungskapazitäten der Kanten angeben. Wie groß ist dann der maximale (Informations)-Fluss zwischen zwei gegebenen Knoten s und t?

Satz: Für jeden Graph $G = (V, E)$ gilt $\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$, , d.h. $\sum_{v \in V} deg(v)$ ist eine gerade Zahl.
Beweis: Bei Betrachtung der Inzidenzstruktur zwische Knoten und Kanten ergibt sich die Aussage durch doppeltes Abzählen: Für jeden Knoten v ist die Anzahl inzidenter Kanten $deg(v)$ und jede Kante ist zu ihren zwei Eckknoten inzident. Damit erhalten wir $\sum_{v \in V} deg(v) = \sum_{e \in E} 2 = 2|E|$.
Folgerung: Die Anzahl der Knoten mit ungeraden Grad ist in jedem Graphen gerade.

Definition: Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ zwei Graphen. Eine Abbildung $\varphi : V \longrightarrow V'$ wird **Graphhomomorphismus** genannt, falls für alle Kanten $\{u, v\} \in E$ auch $\{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E'$ gilt. Ist darüber hinaus φ eine bijektive Abbildung und φ^{-1} auch ein Graphhomomorphismus, so nennt man φ einen **Graphisomorphismus** (und G, G' zueinander **isomorph**).

Die folgenden Standardbeispiele beschrieben formal gesehen nicht einzelne Graphen, sondern Isomorphieklassen.

1) Mit K_n $(n \geq 1)$ bezeichnet man den **vollständigen Graphen** der Ordnung n, d.h. eine Knotenmenge V mit $|V| = n$ und der vollen Kantenmenge $\binom{V}{2}$.
2) Mit C_n $(n \geq 3)$ bezeichnet man den **Kreis** der Länge n, d.h. eine Knotenmenge $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ mit der Kantenmenge $\{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$. **3)** Mit Q_n $(n \geq 1)$ bezeichnet man den **n-dimensionalen Würfel** mit Knotenmenge $\{0, 1\}^n$ (Menge aller n-Tupel über $\{0, 1\}$) wobei zwei Tupel dann und nur dann adjazent sind, wenn sie sich an genau einer Stelle unterscheiden.
4) Mit $K_{n,m}$ $(n, m \geq 0)$ bezeichnet man den **vollständigen, bipartiten Graphen**, dessen Eckenmenge V die disjunkte Vereinigung von zwei Mengen A und B mit $|A| = n$, $|B| = m$ ist und dessen Kantenmenge aus allen Paaren $\{a, b\}$ mit $a \in A$, $b \in B$ besteht.
Definition: Man nennt $G' = (V', E')$ einen **Untergraph** von $G = (V, E)$, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ gilt. Ist außerdem $E' = E \cap \binom{V}{2}$, so wird G' als **induzierter Untergraph** von G bezeichnet.
Definition: Ein Graph $G = (V, E)$ wird **bipartit** genannt, wenn er Untergraph eines vollständigen, bipartiten Graphen ist. Etwas anschaulicher kann man formulieren, daß ein Graph genau dann bipartit ist, wenn man die Knoten so mit zwei Farben einfärben kann, daß keine gleichfarbigen Ecken benachbart sind.

Definition: Das **Komplement** eines Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

Definition: Eine Folge von paarweise verschiedenen Ecken $v_1, v_2, \ldots, v_k$ eines Graphen $G = (V, E)$ repräsentiert einen **Weg der Länge** $k - 1$, falls $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für alle $1 \leq i < k$. Ist außerdem $\{v_k, v_1\} \in E$, so repräsentiert die Folge auch einen **Kreis der Länge** k.
Man sagt, daß v von u erreichbar ist, falls ein Weg $v_1, v_2, \ldots, v_k$ mit $v_1 = u$ und $v_k = v$ in G existiert. Die Länge eines kürzesten Weges zwischen zwei Knoten nennt man ihren Abstand in G.

Lemma: Die Relation der Erreichbarkeit in der Knotenmenge V eines Graphen ist eine Äquivalenzrelation, d.h. sie ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.
Definition: Die Knotenmenge V wird durch die Erreichbarkeitsrelation in Äquivalenzklassen zerlegt, wobei zwei Knoten u, v genau dann in derselben Klasse liegen wenn v von u erreichbar ist. Diese Klassen nennt man die **Zusammenhangskomponenten** (kurz **Komponenten**) des Graphen. G wird **zusammenhängend** genannt, wenn er genau eine Komponente hat.
Stellt man G durch eine Zeichnung dar, so kann man diesen Begriff anschaulich erklären: Zwei Knoten gehören zur selben Komponente, wenn man sie durch einen geschlossenen Kantenzug verbinden kann, wobei die Kanten nur in Knoten und nicht auf Kantenschnitten in der Zeichnung gewechselt werden dürfen.

Satz: Sind zwei Graphen isomorph so sind jeweils die Ordnung, die Größe, die sortierten Gradfolgen und die Anzahl der Komponenten der beiden Graphen gleich.

Definition: Seien u, v Knoten in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$. Sind u und v in einer gemeinsamen Zusammenhangskomponente von G, so definieren wir ihren **Abstand** $d(u, v)$ als Länge eines kürzesten Weges (Anzahl der Kanten des Wegs) von u nach v. Gehören sie zu verschiedenen Komponenten, so setzen wir $d(u, v) = \infty$.

Definition: Der **Durchmesser** $D(G)$ des Graphen ist definiert als das Maximum über alle paarweisen Abstände zwischen Knoten.

Satz: Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn alle in ihm als Untergraph enthaltenen Kreise gerade Länge haben.
Beweis: Zunächst überlegt man sich, dass wir den Graphen als zusammenhängend voraussetzen können, ansonsten führt man den folgenden Beweis für jede Zusammenhangskomponente.
Sei $G = (V, E)$ bipartit, das heißt, $V = A \cup B$ mit $A \cap B = \emptyset$ und Kanten verlaufen nur zwischen Knoten aus A und Knoten aus B. Sei des weiteren C ein Kreis in G. C benutzt abwechselnd Knoten aus A und B und hat somit gerade Länge.
Wir zeigen die andere Richtung. Wir fixieren einen beliebigen Knoten $u \in V$. Wir definieren: $A = \{v \in V |\ d(u, v)\ \text{ gerade }\}$, $B = V \setminus A$ Zu zeigen, es gibt keine Kanten zwischen Knoten aus A (bzw. aus B). Wir führen einen indirekten Beweis:
Wir nehmen an, es gibt eine Kante $\{v, w\}, v, w \in B$ (für A analog) und finden einen Widerspruch zur Annahme, dass alle Kreise gerade Länge haben. Wir betrachten kürzeste Wege von u zu v und zu w. Diese Wege haben gleiche Länge! (wegen der Kante zwischen v und w) Sei x der letzte gemeinsame Knoten auf beiden Wegen. Dann bilden die beiden Wegabschnitte von x nach v bzw. nach w zusammen mit der Kante $\{v, w\}$ einen Kreis ungerader Länge.

Streuspeicherverfahren (Hash-Tabellen)

In diesem Abschnitt lernen wir eine weitere Datenstruktur zur Implementierung von Wörterbüchern kennen. Sie ist anwendbar, wenn die Schlüssel bereits natürliche Zahlen sind oder als solche interpretiert werden können. Diese Struktur ist sehr einfach, hat aber den Nachteil, dass alle Operationen (im schlechtesten Fall) $O(n)$ Zeit kosten. Dafür ist die erwartete Laufzeit konstant und deshalb ist diese Datenstruktur in der Praxis sehr wichtig.
Die Idee besteht darin, alle Einträge (Items) anhand ihres Schlüssels auf N Fächer (engl. bucket - Eimer) zu verteilen. Die Fächer werden in einem Feld A der Größe N (**Bucket Array**) verwaltet. Jedes Fach muss den Zugriff auf alle darin enthaltenen Einträge sicherstellen, z.B. durch eine verkettete Liste.

Die eigentliche Verteilung geschieht durch eine **Hash-Funktion** h, die jedem Schlüssel k eine Zahl $h(k) \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ zuordnet. Werden zwei Einträge durch h in das gleiche Fach gelegt, spricht man von einer **Kollision**. Gute Hash-Funktionen zeichnen sich durch weitgehende Kollisionsvermeidung aus.
Häufig sind die Schlüssel noch nicht als ganze Zahlen gegeben. In solchen Fällen bietet es sich an, eine Hash-Funktion in zwei Stufen zu definieren. Zuerst verwendet man einen **Hash-Code**, der jedem Schüssel eine ganze Zahl zuordnet und im zweiten Schritt wir diese ganze Zahl durch eine **Kompressionsabbildung** in das Intervall $[0, N-1]$ abgebildet. Die Klasse `Object` in Java hat eine Methode `hashCode()`, die einen `int`-Wert (32 Bit) zurückgibt. Da sich dieser Wert in der Regel auf die Lage des Objekts im Speicher bezieht, kann es im Einzelfall zu ungewollten Effekten kommen (z.B. wenn gleiche Strings in verschiedene Fächer gelegt werden).

Hash-Codes

Für Strings (und andere Objekte, die man in einen String umwandeln kann) gibt es zwei Standardmethoden zur Codierung. Zuerst werden bei beiden Methoden alle Zeichen des Strings in `int`-Werte $x_0, x_1, \ldots x_{k-1}$ umgewandelt.
1) Die **Summenmethode** berechnet $x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1}$ als Hash-Code des Strings (unter Verwendung der `int`-Addition). Eine Änderung des Strings an einer Stelle bewirkt damit auch eine Veränderung des Codes, aber diese Methode hat den wesentlichen Nachteil, dass der Code sich bei Buchstabenvertauschung nicht ändert, z.B. haben die Strings `stop` und `post` die gleiche Codierung.
2) Dieser Effekt kann durch die **Polynommethode** umgangen werden. Man fixiert dazu einen `int`-Wert $a \notin \{0, 1\}$ und codiert den String durch die Auswertung des Polynoms $x_0 a^{k-1} + x_1 a^{k-2} + \ldots + x_{k-2} a + x_{k-1}$.

Kompressionsabbildungen

Sei n die Anzahl der Objekte, die in einer Hash-Tabelle mit N Buckets gespeichert sind. Der Wert $\lceil \frac{n}{N} \rceil$ wird als **Ladefaktor** der Tabelle bezeichnet. Mindestens ein Bucket muss diese Anzahl von Einträgen enthalten. Um Kollisionen zu vermeiden, muss der Ladefaktor 1, also $N \geq n$ sein. Der erste Schritt zur Kollisionsvermeidung besteht in der Auswahl einer geeigneten Kompressionsfunktion. Wir gehen jetzt davon aus, dass

der Schlüssel k bereits ein `int`-Wert ist.
Die einfachste Variante einer Kompressionsfunktion ist die sogenannte **Divsionsmethode**, definiert durch $h(k) = k \ mod \ N$. Bei einer zufälligen Schlüsselmenge kann man N beliebig festlegen. Da reale Daten aber oft gewisse Regularitäten aufweisen, ist es besser, für N eine Primzahl zu verwenden.
In vielen Anwendungen hat sich gezeigt, dass die folgende **MAD-Methode** (multiply, add and divide) noch bessere Ergebnisse liefert: $h(k) = (a \cdot k + b) \ mod \ N$, wobei N wieder eine Primzahl und a eine zu N teilerfremde Zahl ist.

Kollisionsbehandlung
Da man Kollisionen nie vollkommen vermeiden kann, muss man Strategien für diesen Fall entwickeln. Man kann zwei Grundstrategien unterscheiden:

1) Die Fächer (Buckets) werden so eingerichtet, dass sie mehrere Objekte halten können, z.B. als dopelt verkettete Liste. Im schlechtesten (aber sehr unwahrscheinlichen) Fall hat man dann eine einzige Liste mit allen Einträgen.

2) Man versucht beim Auftreten einer Kollision das neue Element in ein anderes Fach zu legen und sondiert dazu freie Fächer. Der größte Nachteil von Sondierungsstrategien liegt im hohen Aufwand für Updates nach Löschoperationen.

2.a) **Lineares Sondieren:** Ist $h(k)$ schon belegt, sondiert man die Buckets $h(k) + 1, h(k) + 2, h(k) + 3$ u.s.w. und wählt das erste freie aus. Diese Methode hat den zusätzlichen Nachteil, dass sich sehr schnell voll belegte Abschnitte (Cluster) bilden, die schneller wachsen als die Belegung der unterbesetzten Regionen. Man kann das etwas ausgleichen, wenn man für ein festes $c \neq 1$ die Buckets $h(k) + c, h(k) + 2c, h(k) + 3c$ u.s.w. sondiert.

2.b) **Quadratisches Sondieren:** Diese Methode ist wesentlich besser geeignet, die Bildung großer Cluster zu verhindern oder zumindest zu verzögern. Ist $h(k)$ schon belegt, sondiert man die Buckets $h(k) + 1^2, h(k) + 2^2, h(k) + 3^2$ u.s.w. und wählt das erste freie aus.