16.04.04 Theo Phys. 1

Determinismus: ⟷ Quantenunschärfe

Totale Zuschauerwissenschaft

$\downarrow$

Emanzipation: Urteil ohne "heilige Schrift",
ohne Autorität

Schulen?

wider das Volksgefühl

Üben an Objekten ⟹ feste Körper

Feste Körper

i) bel. Bezugspunkt im Körper P

ii) Bezugspunkt O (beim Beobachter).
Koordinatenursprung

⟹ Ortsvektor

Koordinatensystem

Physikalische Invarianz: Aussage ist unabhängig vom Bezugssystem

Koordinatensysteme

- Karthesische Koordinaten

drei zueinander senkrechte Raumrichtungen
⇒ 3 Einheitsvektoren: $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sollen
ein rechtshändiges, orthonormales Dreibein
bilden

Darstellung eines Vektor $\vec{r}$ im Koordinatensystem

$$\vec{r} = (\vec{r}\cdot\vec{e}_x)\,\vec{e}_x + (\vec{r}\ \vec{e}_y)\,\vec{e}_y + (\vec{r}\cdot\vec{e}_z)\,\vec{e}_z$$

$$= x\cdot\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$; x, y, z = Koordinaten

Bei Beträgen von Vektoren kann oft auch mit $|\vec{r}|^2$ gerechnet werden, also mit $x^2 + y^2$

Schiefer Wurf

$$\frac{d}{dt}r^2 = \left[2r\frac{d}{dt}r = 2\vec{r}\,\frac{d\vec{r}}{dt}\right] \rightsquigarrow \dot{r} = \frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}}{r}$$

allgemein: aus $\vec{r}^{\,2} =$ const folgt $\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = 0$
aus $\dot{\vec{r}}^{\,2} =$ const folgt $\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}} = 0$

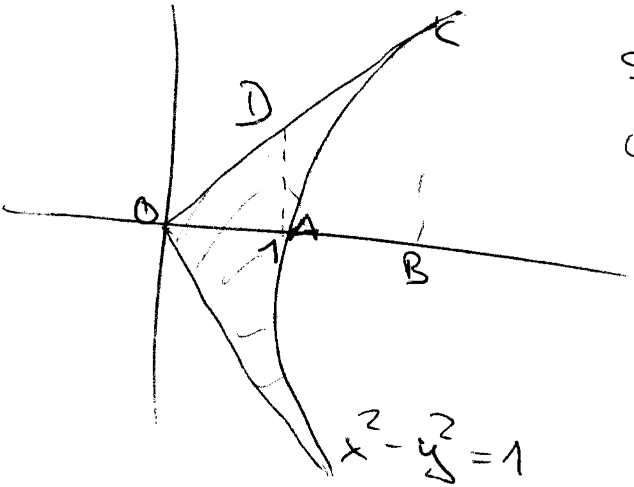
Die Länge einer Bahn

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$l = \int_{t_0}^{t_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2}} + \dots dt = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\, dt$$

Bsp. $z(t) = 0 \quad x(t) - t \qquad y(t) = \sinh(t)$



$\sinh(x) = \overline{BC}$

$\cos(x) = \overline{OB}$

$\tanh(x) = \overline{AD}$

$$v = \sqrt{1 + \sinh^2(t)} = \cosh(t)$$

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \cosh(t)\, dt = \sinh(t_1) - \sinh(t_2)$$

Kreisbahnen

$$\vec{r}(t) = \left(\cos(\omega t) \; ; \; \sin(\omega t)\right)$$

$$\vec{r}\,'(t) = \omega \cdot \left(-\sin(\omega \cdot t) \; ; \; \cos(\omega \cdot t)\right)$$

$$\vec{r}\,''(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t)$$

Polarkoordinaten

wähle Einheitsvektoren $\vec{e_\varphi}$, $\vec{e_r}$

$$\Rightarrow \vec{e_r} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\vec{e_\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Bsp.: $\vec{r}(t) = r \cdot \vec{e_r}(\varphi(t))$

$$\vec{r}\,'(t) = r \cdot \varphi'(\vec{e_\varphi})$$

$$\vec{r}\,'' = \dots$$

Einführung der Hyperbelfunktion

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

$$\tanh(x) := \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

Pythagoras: $-\sinh^2(x) + \cosh^2(x) = 1$

Additionstheoreme:

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x) \cdot \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$$

Umkehrfunktionen: Areafunktionen

$y := \operatorname{Arsinh}(x)$; $\operatorname{Arcosh}(x)$, $\operatorname{Artanh}(x)$

Ableitungen

$$\sinh'(x) = \cosh(x)$$

$$\cosh'(x) = \sinh(x)$$

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

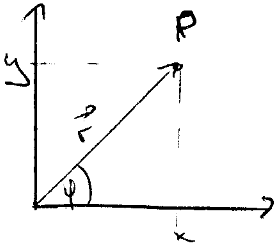
$$\operatorname{Arsinh}'(x) = 1 / \sqrt{1 + x^2}$$

$$\operatorname{Arcosh}'(x) = 1 / \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\operatorname{Artanh}'(x) = 1 / (1 - x^2)$$

Fachschaftsfahrt
7.-9. Mai Swinemünde 20-30 €

TheoPhys 23.04.04



Polarkoordinaten

$$x = r \cdot \cos(\varphi)$$
$$y = r \cdot \sin(\varphi)$$
$$\frac{d\vec{e}_x}{dt} - \frac{d\,\vec{e}_y}{dt} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos(\varphi) \cdot \vec{e}_x + \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin(\varphi) \cdot \vec{e}_x + \cos(\varphi) \cdot \vec{e}_y \end{aligned}\right\} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0$$

$$\frac{d\,\vec{e}_r}{dt} = -\dot{\varphi} \sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \dot{\varphi} \cos(\varphi)\,\vec{e}_y = \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r$$

Ortsvektor: $\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$

Geschwindigkeit: $\dot{\vec{r}} = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\vec{e}} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

für eine konkrete Bewegung brauchen wir

$r = r(t)$ und $\varphi = \varphi(t)$

Die Bahn allein ist auch schon durch $r = r(\varphi)$ gegeben.

Beschleunigung:

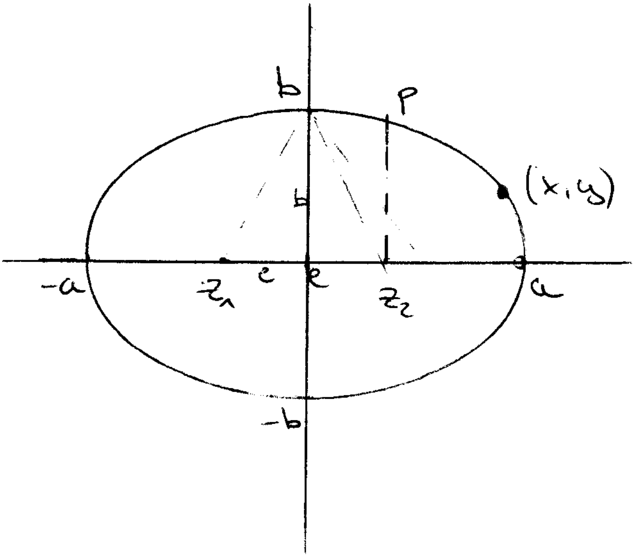
$$\ddot{\vec{r}} = \Big(\underset{\text{radiale B.}}{\ddot{r}} - \underset{\text{zentripetal B.}}{r\dot{\varphi}^2}\Big)\vec{e}_r + \Big(\underset{\text{Koriolis B.}}{2\dot{r}\varphi} + \underset{\text{azimuthale B.}}{r\ddot{\varphi}}\Big)\vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\vec{r}}^{\,2} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}^{\,2} = 2\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}$$

Trick:

$$\dot{r}\cdot\ddot{r} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\dot{r}^2$$



a: halbe große Hauptachse

b: halbe kleine Hauptachse

e: Brennpunktabstand

$\varepsilon = \frac{e}{a}$: Exzentrizität

$$p + \sqrt{p^2 + 4e^2} = 2a \Leftrightarrow e^2 = a^2 - ap$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

Für einen Punt $P(x \mid y)$ gilt:

Er liegt auf der Elypse, wenn gilt

$l_1 + l_2 = 2a$

$$\Leftrightarrow \quad 2a = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2a - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}\right)^2 = (x+e)^2 + y$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + (x-e)^2 + y^2 = (x+e)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a^2 - 4xe = 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(a - \frac{xe}{a}\right)^2 = (x-e)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 \cancel{- 2xe} + \frac{(xe)^2}{a^2} = x^2 \cancel{- 2ex} + e^2 + y^2$$

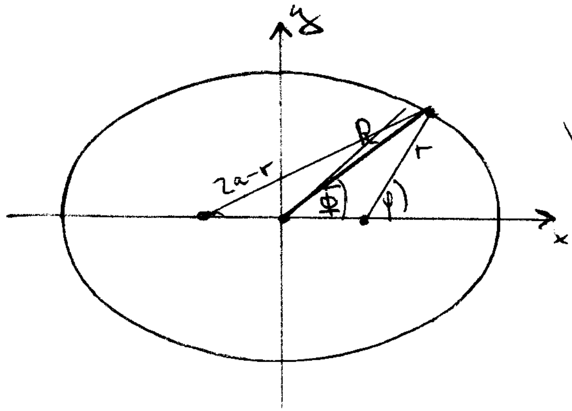
$$\Leftrightarrow \quad y^2 + x^2\left(1 - \frac{e^2}{a^2}\right) = a^2 - e^2$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 + x^2 \frac{b^2}{a^2} = b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Ellipsengleichung

Ellipse in Polarkoordinaten



$$\sqrt{(2a-r)^2} = \sqrt{r\cdot\sin^2(\varphi) + (2e - r\cdot\cos(\varphi))^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \left| \begin{array}{l} x = R\cdot\cos(\Phi) \\ y = R\cdot\sin(\Phi) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{R^2\cos^2(\Phi)}{a^2} + \frac{R^2\sin^2(\Phi)}{b^2} = 1$$

gesucht: $R = R(\Phi)$

$$\Leftrightarrow R^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2\cos^2(\Phi) + a^2\cdot\sin^2(\Phi)}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{a b}{\sqrt{a^2 - e^2\cos^2(\Phi)}}$$

Für r und φ

$$\cancel{4}a^2 - \cancel{4}ar + \cancel{r^2} = \cancel{r^2\sin^2(\varphi)} + \cancel{4}e^2 + \cancel{4}er\cos(\varphi) + \cancel{r^2\cos^2(\varphi)}$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 - e^2 = r\left(e\cdot\cos(\varphi) + a\right) \quad \Big| :a$$

$$p = r\left(\varepsilon\cdot\cos(\varphi) + 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cdot\cos(\varphi)}$$

Newton'sche Gleichung

$$\vec{F} = m_T \cdot \vec{r}\,''$$

Erfahrung: Dynamik

wirke
→ Zukunft

Kinematik : „Zuschauer"

Kräfte :

a) elastische Kräfte
b) Schwerkraft
c) Reibung
d) elektrische Kräfte
e) magnetisch

Schwerkraft

in Erdnähe : $F_s = -g \cdot m_s \cdot \vec{e_z}$

experimentell : $\underline{m_T = m_s} = m$

Freier Fall, ohne Reibung

$m\vec{r}'' = -mg\,\vec{e}_z$ ⇒ Bewegungsgleichung

gesucht: $\vec{r}(t)$ ⇒ Bahn; Lösung der Bew.-Gl.

+ Anfangswerte müssen gegeben sein

Zur Zeit $t=0$ müssen $\vec{r} = \vec{r}(0)$ und

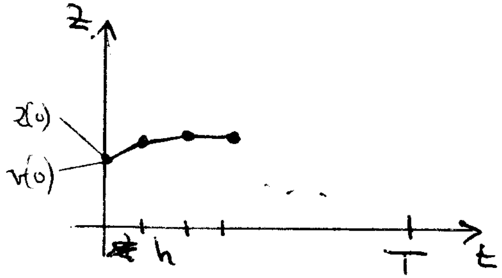
$\vec{r}' = \vec{r}'(0)$ gegeben sein

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ ist gesucht. Und es sei

$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

⇒ Lösung raten!

Numerische Lösung für Differentialgleichungen



h = Zeit

a) Zeitintervall wählen: $0 \leq t \leq T$

b) Schrittweite wählen: h ; $t_n = n \cdot h$

$N \cdot h = T$

$$\underline{\ddot{z} = -g}$$

$$\dot{z} = w \Rightarrow \ddot{z} = \dot{w} \Leftrightarrow \dot{w} = -g$$

neues System

Aus der Diff.-Gl. 2. Ordnung wird ein gekoppeltes System 1. Ordnung gemacht

$$\dot{w} \simeq \frac{w(t+h)-w(t)}{h}$$

$$w(t+h) = h\cdot\dot{w}(t) + w(t)$$

$t \Rightarrow t_n$ Diskrete Schritte

Def: $w_n = w(t_n) = w(n\cdot h)$

$\Rightarrow$

$$w_{n+1} = h\cdot\dot{w}_n + w_n$$

$$w_{n+1} = -g\cdot h + w_n$$

$w_0 = 0$

$w_1 = -g\cdot h$

$w_2 = -2gh$

$\vdots$

$w_n = -n\cdot g\cdot h$

zurück nach z

$z_{n+1} = h\dot{z}_n + z_n$

$z_{n+1} = hw_n + z_n$

$z_{n+1} = -ngh^2 + z_n$

$z_0 = 0$

$z_1 = 0$

$z_2 = -gh^2$

$z_3 = -2gh^2 - gh^2$

$\vdots$

$z_n = \frac{1}{2}gh^2(n^2-n)$ *

* Ansatz : $z_n = an^2 + bn$

$$a(n+1)^2 + b(n+1) = -ngh^2 + an^2 + bn$$

$$\Leftrightarrow \quad 2an + a + b = -gh^2 n$$

$$\Rightarrow \quad a = -\frac{g}{2}h^2 \quad ; \quad b = -a$$

Bsp2 : Senkrechter Wurf mit Luftwiderstand

$$\vec{F}_R := -\gamma \dot{\vec{r}}$$

Bewegungsgl.: $m\ddot{\vec{r}} = -mg\,\vec{e}_z - \gamma\dot{\vec{r}}$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{\gamma}{m} \cdot \dot{z} + g = 0$$

Anfangsbed.: $\vec{r}(0) = \vec{0} \qquad \dot{\vec{r}}(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\w_0\end{pmatrix}$

$$\ddot{z} + \frac{\gamma}{m}\dot{z} + g = 0$$

$$\Rightarrow \dot{z} + \frac{\gamma}{m} z + gt = \text{const} = w_0$$

Ansatz : $z(t) = A \cdot e^{-b \cdot t} + Bt + C \quad | A, b = \text{const}$

$\dot{z} = -Abe^{-bt} + B \quad | \text{einsetzen}$

$$0 = \dot{z} + \frac{\gamma}{m} z + gt - w_0$$

$$= -Abe^{-bt} + B + \frac{\gamma}{m} A e^{-bt}$$

$$+ \frac{\gamma}{m} Bt + \frac{\gamma}{m} \cdot C + gt - w_0$$

$\Longrightarrow$

$$b = \frac{\gamma}{m} \qquad B = -g \frac{m}{\gamma}$$

$$C = \frac{m}{\gamma} (w_0 - B) = \frac{m w_0}{\gamma} + \frac{g m^2}{\gamma^2}$$

$\Longrightarrow$ Lösung:

$$z(t) = A e^{-\frac{\gamma}{m} t} - \frac{mgt}{\gamma} + \frac{m^2 g}{\gamma^2} + \frac{m w_0}{\gamma}$$

Anfangsbed: $z(0) = 0 \quad \Longrightarrow$

$$z(t) = \frac{m}{\gamma} \left(\frac{mg}{\gamma} + w_0 \right) \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t} \right) - \frac{mgt}{\gamma}$$

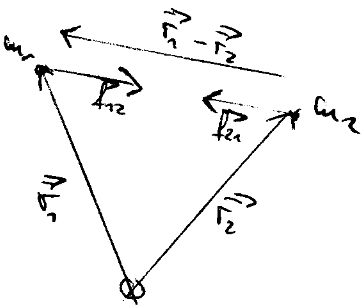
Kommentare zur Exponentialfunktion

Bei Zinsrechnung:

$$S_k(x) = S_0 \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k$$

$$e^x = \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k$$

Schwerkraft



$$\vec{f}_{12} = \gamma m_1 m_2 \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \frac{1}{|r_2 - r_1|^3}$$

$$\vec{f}_{21} = \gamma m_1 m_2 \quad (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \frac{1}{|r_2 - r_1|^3}$$

die Abhängigkeit von r ergibt sich experimentell

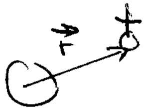
Bewegungsgl.:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{f}_{12} = \frac{\gamma m_1 m_2}{|r_2 - r_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{f}_{21} = \frac{\gamma m_1 m_2}{|r_2 - r_1|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Lsg.: $r_1(t)$, $r_2(t)$ ist zu gewinnen, wenn Anfangsbed. gegeben

Prototyp: Sonne sei fest!



$\Rightarrow$

$$(1)\quad \cancel{m}\ddot{\vec r} = \frac{-\gamma M \cancel{m}}{r^3}\vec r \qquad \Big|\times\vec r$$

$$\Rightarrow\quad \vec r\times\ddot{\vec r} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec r\times\dot{\vec r}\right) = \underbrace{\dot{\vec r}\times\dot{\vec r}}_{0} + \underbrace{\vec r\times\ddot{\vec r}}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\vec r}\times\vec r = \text{const}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec l = m\dot{\vec r}\times\vec r \quad \text{Drehimpulsvektor ist const}}$$

jetzt: $(1)\cdot\dot{\vec r}$:

$$\ddot{\vec r}\cdot\dot{\vec r} = -\frac{\gamma M}{r^3}\vec r\cdot\dot{\vec r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec r}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma M}{r}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{(\gamma M)}{r} = \gamma\cdot M\cdot\frac{d\frac{1}{r}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{r} = -\frac{\dot r}{r^2} = -\frac{\vec r\cdot\dot{\vec r}}{r^3}$$

$$\dot r = \frac{d}{dt}\sqrt{\vec r\cdot\vec r} = \frac{\vec r\cdot\dot{\vec r}}{r}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^{2} - \frac{gM}{r}\right)}_{= \text{const}} = 0$$

kinetische Energie $= \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{2}$ $(= T)$

potentielle Energie $= - \frac{gMm}{r}$ $(= V)$

$\boxed{T + V = \text{const} = E}$ Energieerhaltung

$E < 0$ ⇒ Körper ist im System gebunden

$E > 0$ ⇒ Körper ist frei

$\vec{l} = \text{const}$; $\vec{l} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

$\Rightarrow \vec{l} \perp \vec{r}$; $\vec{l} \perp \dot{\vec{r}}$

⇒ Es gibt eine Ebene beschr. d. $\vec{l}$ als Normale

$\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$ liegen in einer Ebene (immer in derselb)

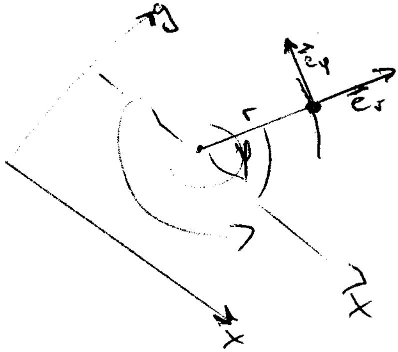
:= Bahnebene → ebene Bewegung

Koordinaten werden daher so eingeführt:

Wir legen $\vec{l}$ in die z-Richtung:

$$\frac{\vec{l}}{m} = \lambda \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = (x, y, 0) \qquad \dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$$



$\Rightarrow$ Verwendung von Polarkoordinaten

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{e}_r = \varphi \vec{e}_\varphi}$$

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

<u>Energiesatz</u>

$$(\dot{\vec{r}})^2 = \dot{r}^2 + r^2\varphi^2$$

$$e = \frac{E}{m} = \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}})^2 - \frac{GMm}{r} \quad (1) \; ; e = \frac{E}{m}$$

$$\lambda \vec{e}_z = \frac{\vec{\ell}}{m} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

$$= r \cdot \vec{e}_r \times \left(\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \right)$$

$$= r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow r^2 \dot{\varphi} = \lambda \qquad (2)$$

unbekannte Funktionen:

$r = r(t)$ $\varphi = \varphi(t)$ zu lösen mit

(1) Energieerhaltung

(2) Drehimpulserhaltung ⇒ keine weiteren Erhaltungsgr.

Lösung:

(2) in (1)

$$2e = \dot{r}^2 + \frac{\lambda^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} \qquad (? \ldots \text{schwer})$$

⇒ lieber nur die Form d. Bahn $r = r(\varphi)$

$$r = r(\varphi) \quad ; \quad \varphi(t)$$

$$\dot{r} = r'(\varphi)\, \dot{\varphi} \left(= \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) \quad ; \quad \dot{\varphi} = \frac{\lambda}{r^2}$$

$$= \frac{\lambda}{r^2} \cdot r'$$

$$2e = \frac{\lambda^2}{r^4}(r')^2 + \frac{\lambda^2}{r^2} - \frac{2gM}{r}$$

$$\Leftrightarrow 2er^4 = \lambda^2\left((r')^2 + r^2\right) - 2gMr^3$$

($R := \frac{1}{r}$ würd es etwas vereinfachen)

. . .

$$\rightsquigarrow r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$$

$\Rightarrow$ Planetenbahnen sind Ellipsen

- Rückführung, überprüfung

$$r' = \frac{p\epsilon \cdot \sin(\varphi)}{(1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi))^2} = \frac{\varepsilon}{p} r^2 \cdot \sin(\varphi)$$

$$\frac{(r')^2}{r^4} = \frac{\varepsilon^2}{p^2} \sin^2(\varphi)$$

$$2e \overset{!}{=} \lambda^2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{p^2} \sin^2(\varphi) + \lambda^2/p^2 \left(1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi)\right)^2 - \frac{2gM}{p}\left(1 + \varepsilon \cos(\varphi)\right)$$

$$2e = \frac{\lambda^2 \varepsilon^2}{p^2}\left(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right) + \frac{\lambda^2}{p^2} + 2\frac{\lambda^2}{p^2}\varepsilon \cdot \cos(\varphi) - \frac{2gM}{p}\left(1 + \varepsilon \cos\varphi\right)$$

Koeffizienten vor cos(φ): $2\frac{\lambda^2}{p^2}\varepsilon = \frac{2 g M}{p}\varepsilon$

$$\Rightarrow \boxed{p = \frac{\lambda^2}{g\cdot M}}$$

$$2e = \frac{\lambda^2}{p^2}\left(\varepsilon^2+1\right) - 2gM\cdot\frac{1}{p}$$

$$\varepsilon^2 = 2e\frac{p^2}{\lambda^2} + \frac{2gMp}{\lambda^2} - 1$$ | mit p eingesetzt

$$= 2e\cdot\frac{\lambda^2}{(gM)^2} + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon^2 = 1 + \frac{2e\lambda^2}{g^2M^2}}$$

$\varepsilon^2 < 1$ für geb. Bahn

$\Rightarrow$ Ellipse $\Rightarrow$ siehe Übungsblatt

Fortführung Kepler

Bahn: $$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi)}$$

$$p = \frac{\lambda^2}{\gamma} \quad \text{bzw} \quad = \frac{\lambda^2}{\gamma M}$$

$$\varepsilon^2 = 1 + 2\,\frac{\lambda^2}{\gamma^2 M^2}\, e$$

λ = Drehimpuls / m
e = Energie / m

$\varepsilon = 0 \Rightarrow$ Kreis $e<0$ λ ist max

$0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow$ Ellipse $e < 0$

$1 < \varepsilon \Rightarrow$ Hyperbel $e > 0$ } Fluchtbewegungen,

$\varepsilon = 1 \Rightarrow$ Parabel $e = 0$ } ("Streuung")

$\lambda = 0$ Sturz ins Zentrum

physikalisch: λ, e

polargeometrisch: p, ε

karthesisch-geo..: a, b

a: $$2a = \frac{p}{1+\varepsilon} + \frac{p}{1-\varepsilon} \Rightarrow a = \frac{-\lambda}{\gamma M}\cdot\frac{(\gamma M)^2}{2\lambda^2 e}$$
$$= -\frac{\gamma M}{2e}$$

b: $$b = \sqrt{a^2\,(1-\varepsilon^2)} \Leftrightarrow b = \frac{\lambda}{\sqrt{-2e}}$$

Dynamik in der Bahn

$$\boxed{\begin{aligned} &r^2\dot{\varphi} = \lambda \\ &2e = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - 2\frac{\gamma M}{r} \end{aligned}}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\lambda}{r^2} = \frac{\lambda}{p^2}\left(1+\varepsilon\cos(\varphi)\right)^2$$

$$\frac{d\varphi}{\left(1+\varepsilon\cos(\varphi)\right)^2} = \frac{\lambda}{p^2}\,dt$$

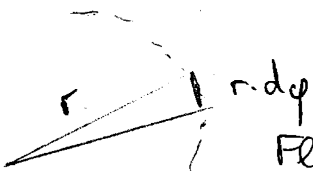
$$\rightsquigarrow F(\varphi) = \frac{\lambda}{p^2}t \qquad \rightsquigarrow \varphi = \varphi(t)$$

Gesamte Umlaufzeit:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\left(1+\varepsilon\cos(\varphi)\right)^2} = \frac{\lambda}{p^2}\int_0^T dt$$

(Lösung ansehen) →

$$r^2\,d\varphi = \lambda\,dt$$



Fläche $df = \frac{1}{2}r^2 \cdot d\varphi$

$$2\,df = \lambda \cdot dt$$

(Flächensatz:) $\oint df = \frac{\lambda}{2}T \Rightarrow T = \frac{2}{\lambda}\pi ab$

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} a \frac{\lambda}{\sqrt{-2e'}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{gM}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{gM} a^2$$

$$\frac{d\varphi}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\lambda}{p^2}\left(1+\varepsilon\right)^2$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{-2\lambda}{p^2}\left(1+\varepsilon\cos(\varphi)\right)\varepsilon\sin(\varphi)\dot{\varphi} \xrightarrow{t\to 0} 0$$

$$\dddot{\varphi} = -\frac{2\lambda}{p^2}\Big[-\varepsilon^2\sin^2(\varphi)\,\dot{\varphi}^2 + \left(1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi)\right)\varepsilon \left(\dot{\varphi}^2\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\,\ddot{\varphi}\right)\Big] \xrightarrow{t\to 0} \ldots\text{const}$$

Gegeben eine Funktion $f(x)$, die beliebig oft abgeleitet werden kann (a.d. Stelle $x=0$)

Gesucht: eine Polynom $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$, das $f(x)$ in der Nähe von $x=0$ so gut wie möglich approximiert

$\Rightarrow$ Taylor - Entwicklung

Wir verlangen, dass $P_n(x)$ mit $f(x)$ in allen Ableitungen von der 0-ten bis zur n-ten an der Stelle $x=0$ übereinstimmt.

$$\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = a_m \cdot m! + a_{m+1}\frac{(m+1)!}{1!}$$
$$+ a_{m+2}\frac{(m+2)!}{2!}x^2 + \dots$$
$$+ a_n \frac{n!}{(n-m)!}x^{n-m}$$

$$\xrightarrow{x\to 0} \underline{a_m m! \overset{!}{=}} f^{(m)}(0)$$

$$\Rightarrow f(x) \simeq \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j$$

wenn Konvergenz, dann kann $n=\infty$ berechnet werden

Taylor-Reihen-Entwicklung

$$f(x) \simeq P_n(x)$$

$$f^{(k)}(0) \overset{!}{=} P_n^{(k)}(0)$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$$

Bsp.:

- $f(x) = e^x$; $f^{(k)}(x) = e^x$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

- $f(x) = \sin(x)$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k$$

- $f(x) = (1+x)^k$

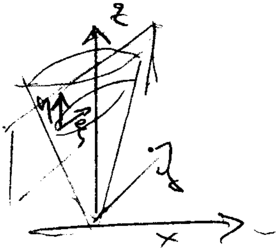
$$f^{(j)}(x) = k(k-1)\dots(k-j+1) \quad (1+x)^{k-j}$$

$$\xrightarrow{x\to 0} k(k$$

$$\Rightarrow (1+x)^k = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(k(k-1)\dots(k-j+1)\Big)\frac{1}{j!} x^j$$

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2}$$

Kegelschnitte



Kegel: $x^2 + y^2 = z^2$

Ebene: $z = (x+1)\tan(\alpha) + 1$

$$\eta = y \,, \quad \xi = \frac{x+1}{\cos(\alpha)}$$

$z = \xi \sin(\alpha) + 1$ in Kegel einsetzen

$$(\xi\cos(\alpha) - 1)^2 + \eta^2 = (\xi \cdot \sin(\alpha) + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \xi^2(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) - 2\xi(\cos(\alpha) + \sin(\alpha)) + \eta^2 = 0$$

quadrat. Gl.

$$\Leftrightarrow \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\left(\xi - \frac{\cos(\alpha) + \sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)}\right)^2 + \eta^2 =$$

$$\frac{1}{(\cos(\alpha) - \sin(\alpha))^2} \cdot (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))$$

$$= \frac{\cos(\alpha) + \sin(\alpha)}{\cos(\alpha) - \sin(\alpha)}$$

Normalformen

Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Hyperbel: $\cup$ $\cap$ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

) ($\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$y = \frac{1}{x}$

Parabel: $y = 2px^2$ $\cup$ $\cap$

$x = 2py^2$) (

$y = \pm\sqrt{\frac{x}{2p}}$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\xi - \frac{1}{\cos(\alpha)-\sin(\alpha)}\right)^2}{\frac{\cos(\alpha)+\sin(\alpha)}{\left(\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)\right)\left(\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\right)}} + \frac{\eta^2}{\frac{\cos(\alpha)+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)-\sin(\alpha)}} = 1$$

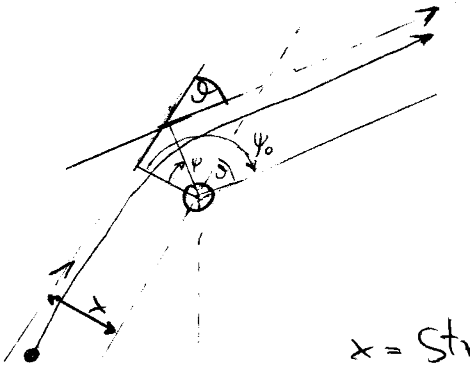
$$\Leftrightarrow \frac{\left(\xi - \frac{1}{\cos(\alpha)\ \sin(\alpha)}\right)^2}{\frac{1}{\left(\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\right)^2}} + \frac{\eta^2}{\frac{\cos(\alpha)+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)-\sin(\alpha)}} = 1$$

• $\alpha = -\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{3\pi}{4}$	Grade
$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}$	Parabel
$\alpha = 0$	Kreis
$\alpha > \frac{\pi}{2}$	Hyperbel
$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$	Ellipse

10. 5. 04.

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos\psi}$$

Streuung (Hyperbel) $\varepsilon > 1$



v_∞ ; $v_{pot} = 0$

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

x = Streuparameter

$$\vartheta = 2\psi_0 - \pi$$

$$1 + \varepsilon \cdot \cos(\psi_0) = 0$$

$$\Rightarrow \cos\psi_0 = -\frac{1}{\varepsilon}$$

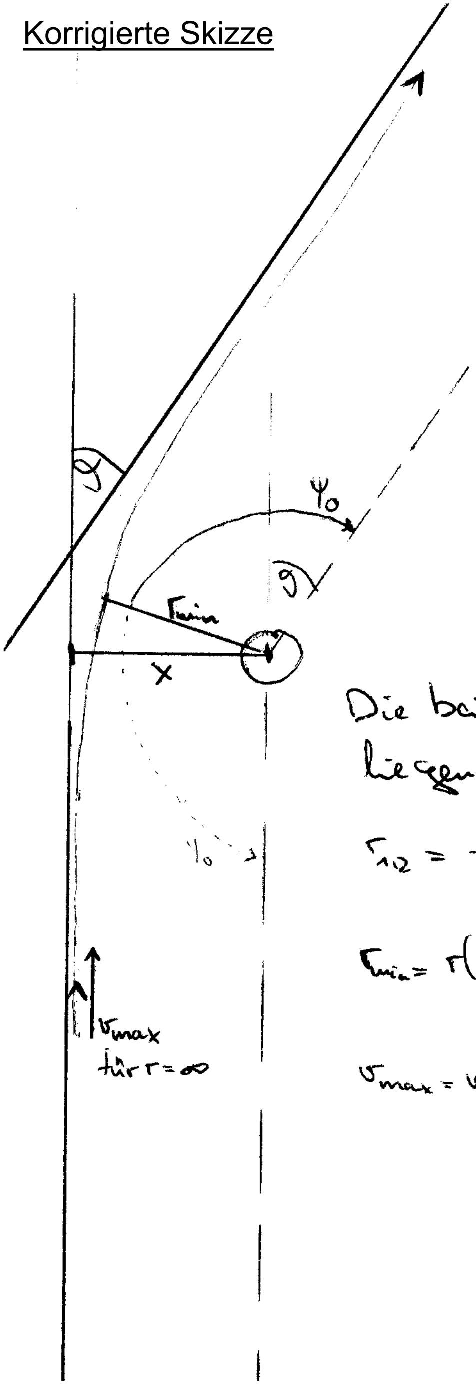
Berechnung des Streuwinkels aus Streuparameter u. v_0

$\varepsilon^2 - 1 = 2\frac{\lambda^2}{\gamma^2} \cdot e$; λ = Drehimpuls / masse

$\gamma = GM$

e = Energie / Masse

Korrigierte Skizze



$$\vartheta = 2\Psi_0 - \pi$$

Die beiden Asymptoten liegen bei

$$r_{12} = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\pm\Psi_0)}$$

$$r_{min} = r(0) = \frac{p}{1+\varepsilon}$$

$$v_{max} = v_\infty = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m}}$$

$$\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \sin\left(\psi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\psi_0) = \frac{1}{\varepsilon}$$

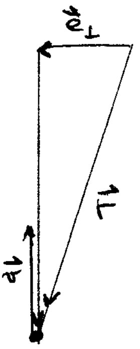
$$\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \sqrt{1 - 1/\varepsilon^2} \qquad (\text{s. d. Pyth.})$$

$$\frac{\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} = \frac{\sqrt{1 - 1/\varepsilon^2}}{1/\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

$$= \sqrt{2 \frac{\lambda^2}{\gamma^2} e} = \cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{\gamma}{\lambda\sqrt{2e}}$$

$$\frac{\ell}{m} = \lambda = \left|\vec r \times \dot{\vec r}\right| = \quad x \cdot v_\infty$$



$$\left|\vec r \times \dot{\vec r}\right| = x \left|\dot{\vec r}\right|$$

$e = E_{kin}$, da E_{pot} im $\infty = 0$

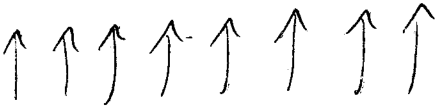
$e = \frac{1}{2} v_\infty^2$

$$\rightarrow \boxed{\tan\frac{\vartheta}{2} = \frac{\gamma}{2\sqrt{2e}} = \frac{\gamma}{x \cdot v_\infty^2}}$$

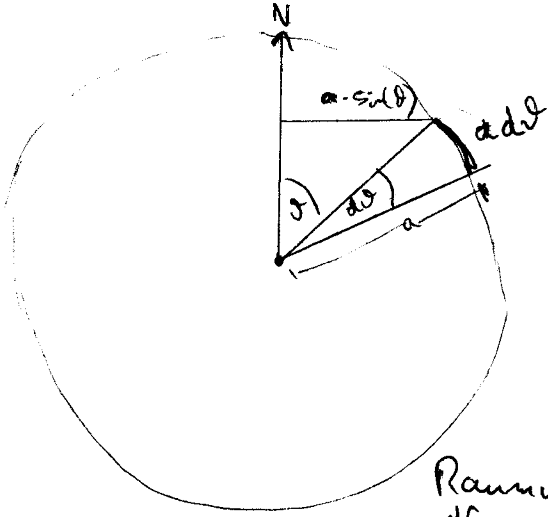
auch für Streuung mit geladenen Teilchen etc.

(Rutherford)

j_{aus} = Teilchenstrom pro Raumwinkel

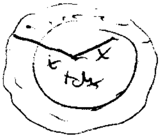


j_{ein} = Teilchenstrom / Fläche



Raumwinkel:

$d\Omega = \frac{df}{a^2} = \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi$



$$N_x := \dot{j}_{ein}\, 2\pi x \cdot dx = N_\vartheta = \cancel{\dot{j}_{aus}}$$

$$= \dot{j}_{aus}\, 2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$\dot{j}_{aus} = \dot{j}_{ein} \frac{x \cdot dx}{\sin(\vartheta)\cdot d\vartheta}$$

$$x = \frac{\gamma^2}{v_\infty^2} \cdot \cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{d\vartheta} = \frac{\gamma^2}{2 v_\infty^2} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

$$\dot{j}_{aus} = \frac{\gamma^2}{2 v_\infty^4} \frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sin^3\frac{\vartheta}{2} \cdot \sin\frac{\vartheta}{2} \cos\frac{\vartheta}{2}}$$

$$= \left(\frac{\gamma}{2 v_\infty^2 \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}\right)^2$$

14.05.04 Wdh. Vielteilchensystem

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_j \vec{f}_{ij} + \vec{F}_i$$

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji} = \varphi_{ij} \frac{1}{r_{ij}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

i) $\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}$ (Gesamtdrehmoment)

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i = \sum_i m \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$$

$$\vec{M} = \sum_i \underbrace{\vec{r}_i \times \vec{F}_i}_{\vec{M}_i}$$

ii) Impulssatz

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{ik} \vec{f}_{ik} + \sum_i \vec{F}_i$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum_i m_i \dot{\vec{r}}\right)}_{p_i} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}$$

$$\sum \vec{p}_i = \vec{P}$$

$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}}$ $\Rightarrow$ wenn $\vec{F} = \vec{0}$

(Summe der äußeren Kräfte verschwindet) $\Rightarrow$ $\vec{P} = \text{const}$

iii) Energieerhaltung

Bedingung: $\varphi_{ij} = \varphi_{ij}(r_{ij})$; $\vec{F}_i = 0$

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_j \vec{f}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\left(m \dot{\vec{r}}_i^2\right) = \sum_i \frac{\varphi_{ij}}{r_{ij}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \dot{\vec{r}}_i$$

$$- \sum_{i,j} = \frac{\varphi_{ij}}{r_{ij}} \vec{r}_j \dot{\vec{r}}_i = - \sum_{i,j} \frac{\varphi_{ij}}{r_{ji}} \vec{r}_i \dot{\vec{r}}_j$$

$$= - \sum_{i,j} \frac{\varphi_{i,j}}{r_{ij}} \vec{r}_i \vec{r}_j$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2\right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\varphi_{i,j}}{r_{i,j}} \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)\left(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2\right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\varphi_{ij}(r_{ij})}{r_{ij}} \vec{r}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_{ij}$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Phi_{ij}(r_{ij}), \text{ wenn } \Phi_{ij}'(r_{ij}) = \varphi_{ij}(r_{ij})$$

Beweis $\frac{d}{dt} \Phi(r) = \Phi'(r) \frac{dr}{dt}$

$$= \Phi'(r) = \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r} =$$

$$= \frac{\varphi(r)}{r} \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$$

$r = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$

$$\frac{d}{dt} r = \frac{2 \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{2\sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}} = \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r}$$

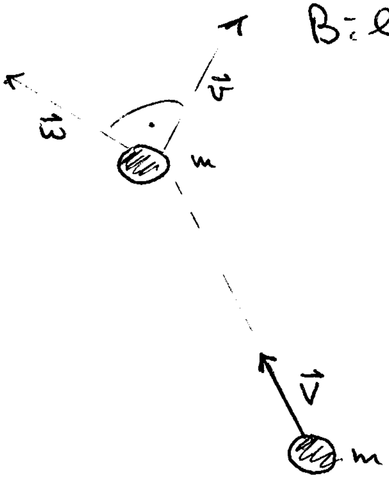
Def.: Potential (der inneren Kräfte)

$$V = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} \phi_{ij}(r_{ij})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\sum\left(\frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right)}_{T = \text{gesamte kin. Energie}} = -\frac{d}{dt}V$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{(T+V)}_{\text{const.}} = 0$$

Billard-Spiel



- Impulserhaltung:

Anfangs: $\vec{P}_0 = m \cdot \vec{V}$; am Ende

$$\vec{P}_1 = m \cdot \vec{v} + m \vec{w}$$

$$\Rightarrow \vec{P}_0 = \vec{P}_1 \Rightarrow \boxed{\vec{V} = \vec{v} + \vec{w}}$$

- Energieerhaltung:

Anfang: $E_0 = \frac{1}{2} m \vec{V}^2$; am Ende

$$E_1 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m w^2$$

$$\Rightarrow E_0 = E_1 \Rightarrow \boxed{V^2 = v^2 + w^2}$$

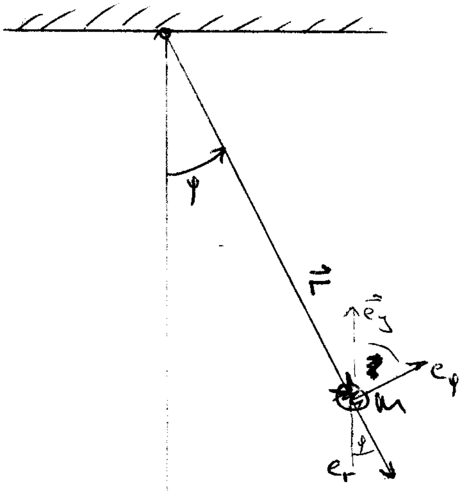
$$V^2 = \vec{V}^2 = (\vec{v}+\vec{\omega})^2 = \vec{v}^2 + \vec{\omega}^2 + \underbrace{2\vec{v}\cdot\vec{\omega}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \sphericalangle(\vec{v},\vec{\omega}) = 90°$$

Pendel

ebenes mathematisches Pendel

Stange hat keine Masse



$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$

$r = \text{const.}$

$\frac{d}{dt}\vec{e}_r = \dot{\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi$

$\frac{d}{dt}\vec{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r$

$\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$

$$\dot{\vec{r}} = r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\ddot{\vec{r}} = r\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \underbrace{-r\dot{\varphi}^2\vec{e}_r}_{\text{Zentripetalbeschl.}}$$

Bewegungsgleichung

1. Version : Drehimpulssatz

$$\dot{\vec{l}} = \vec{M}$$

$$\vec{l} = m\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = mr^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} \quad ; \quad \vec{F} = -mg\cdot\vec{e}_y + f_s\,\vec{e}_r$$

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = -mgr\cdot\vec{e}_r \times \vec{e}_y = -mgr\sin(\varphi)\,\vec{e}_z$$

$$\frac{d}{dt}\vec{l} = mr^2\ddot{\varphi}\,\vec{e}_z \overset{!}{=} -mgr\sin(\varphi)\,\vec{e}_z$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{r}\sin(\varphi) = 0}$$

2. Version : Newtonsche Gleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{f}$

$$m r \ddot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2 \vec{e}_r = -mg\vec{e}_y + f\vec{e}_r$$

mit $\vec{e}_y = -\cos(\varphi)\vec{e}_r + \sin(\varphi)\vec{e}_\varphi$

$\overset{2)}{\cdot e_\varphi} \Big| \overset{1)}{\cdot \vec{e}_r} \Big|$ $$-mg\vec{e}_y + f\vec{e}_r = mg\cos(\varphi)\,\vec{e}_r - mg\sin(\varphi)\vec{e}_\varphi + f_s\vec{e}_r$$

$$-r\dot{\varphi}^2 m = mg\cos(\varphi) + f_s \qquad (1)$$

$$m r\ddot{\varphi} = -mg\sin(\varphi) \qquad (2)$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{r}\cdot\sin(\varphi) = 0}$$

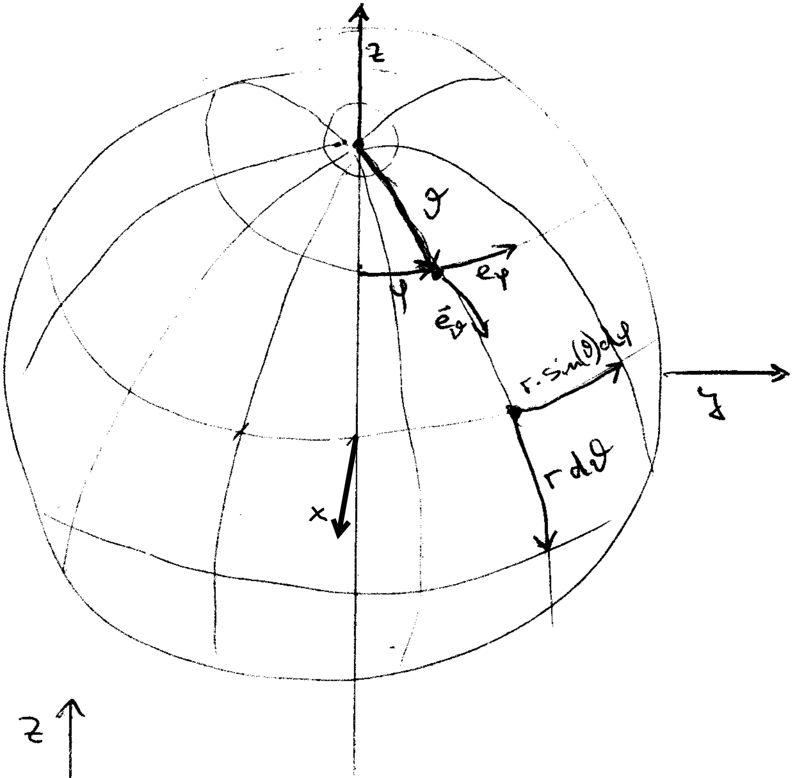
Fadenspannung aus (1)

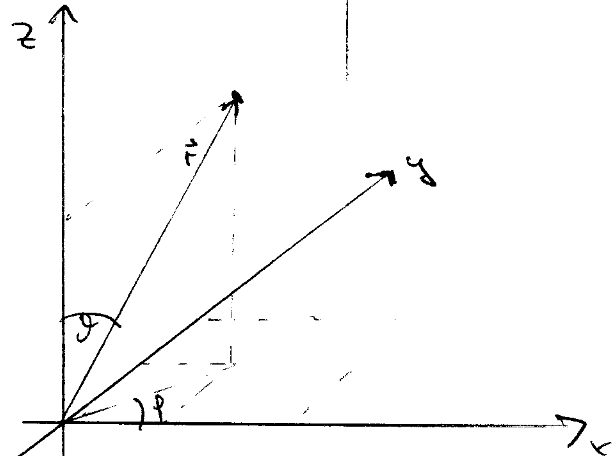
$$\boxed{f_s = -mr\dot{\varphi}^2 - mg\cos(\varphi)}$$

f_s ist eigtl. $-f_s$ (für die komplette Rechnung)

Sphärisches math. Pendel

Zur Einführung von Kugelkoordinaten





!

$$\vec{e}_r = (\sin(\vartheta)\cos(\varphi),\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi),\ \cos(\vartheta))$$

$$\vec{e}_\vartheta = (\cos(\vartheta)\cos(\varphi),\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi),\ -\sin(\vartheta))$$ 1)

$$\vec{e}_\varphi = (-\sin(\varphi),\ \cos(\varphi),\ 0)$$

1) $\frac{d\vec{e}_r}{d\vartheta}$

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta = \vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\vartheta$$

$$\vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r$$

Ableitungen

- $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + \dot{\varphi}\sin(\vartheta)\vec{e}_\varphi$;

$\left(\dot{\vec{e}}_r = \dot{\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\frac{d}{d\varphi}\vec{e}_r\right)$

- $\dot{\vec{e}}_\vartheta = -\dot{\vartheta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos(\vartheta)(-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0)$

$= -\vartheta\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos(\vartheta)(\vec{e}_\varphi)$

- $\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$

$= -\dot{\varphi}(\sin(\vartheta)\vec{e}_r + \cos(\vartheta)\vec{e}_\vartheta + 0 \cdot e_\varphi)$

$= -\dot{\varphi}\sin(\vartheta)\vec{e}_r - \dot{\varphi}\cos(\vartheta)\vec{e}_\vartheta$

$f(x(t), y(t))$

$$\frac{d}{dt}f = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$\vec{a} = (\ )\vec{e}_r + (\ )\vec{e}_\vartheta + (\ )\vec{e}_\varphi$

$\vec{a}\cdot\vec{e}_r = (\ )$

...

$\Rightarrow$

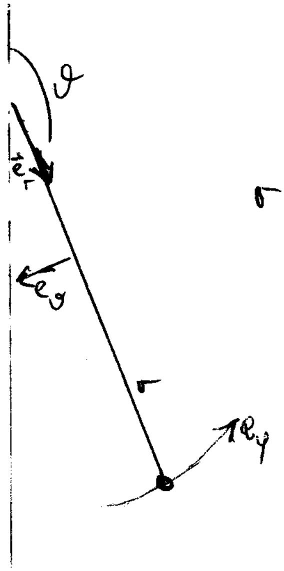
$\vec{a} = (\vec{a}\cdot\vec{e}_r)\vec{e}_r$

$+ (a\vec{e}_\vartheta)\vec{e}_\vartheta$

$+ (\vec{a}\cdot e_\varphi)e_\varphi$

Sphärisches Pendel

$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$



$r = \text{const.}$

allgem. Gleichung:

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg \cdot \vec{e}_z - \vec{f}_{s\vec{e}_r} = -mg\left(\cos(\vartheta)\vec{e}_r - \sin(\vartheta)\vec{e}_\vartheta + 0 \cdot \vec{e}_\varphi\right) - f_s\vec{e}_r$$

Zum einsetzen auf der linken Seite

$$\dot{r} = r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\dot{\varphi}\sin(\vartheta)\vec{e}_\varphi$$

$$\ddot{r} = r\ddot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\dot{\vartheta}\left(-\dot{\vartheta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos(\vartheta)\vec{e}_\varphi\right)$$
$$+ r\ddot{\varphi}\sin(\vartheta)\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos(\vartheta)\vec{e}_\varphi$$
$$- r(\dot{\varphi})^2\sin(\vartheta)\left(\sin(\vartheta)\vec{e}_r + \cos(\vartheta)\vec{e}_\vartheta\right)$$

$$= -r\left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2(\vartheta)\right)\vec{e}_r + r\left(\ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\right)\vec{e}_\vartheta$$

$$+ r\left(\underbrace{2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\vartheta)}_{\text{koriolis}} + \underbrace{\ddot{\varphi}\sin(\vartheta)}\right)\vec{e}_\varphi$$

die rad. Komponente rechts einsetzen:

$$-r\left(\dot\vartheta^2+\dot\varphi^2\sin^2(\vartheta)\right) = -g\cos(\vartheta) - \frac{f_s}{m}$$

ϑ- Richtung:

$$\boxed{r\cdot\ddot\vartheta - r\dot\varphi^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) = g\sin(\vartheta)} \qquad (1)$$

y - Richtung

$$\boxed{2\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta) + \ddot\varphi\sin(\vartheta) = 0} \qquad (2)$$

Erhaltungssätze:

aus (2)

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin(\vartheta)}\cdot\frac{d}{dt}\left(\dot\varphi\sin^2(\vartheta)\right) = \frac{\ddot\varphi\sin^2(\vartheta)+2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\cdot\dot\varphi\dot\vartheta}{\sin(\vartheta)}$$

$$= \ddot\varphi\sin(\vartheta)+2\cos(\vartheta)\dot\varphi\dot\vartheta = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot\varphi\sin^2\vartheta\right) = 0 \qquad \boxed{\dot\varphi\sin^2(\vartheta) = l}$$

Drehimpulserhaltung

aus (1) jetzt Energieerhaltung

$$\ddot{\vartheta} - \frac{\lambda^2 \cos(\vartheta)}{\sin^3(\vartheta)} - \frac{g}{r}\sin(\vartheta) = 0$$

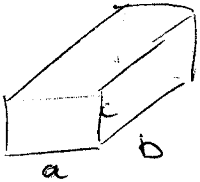
(Drehimpuls wurde eingesetzt)

$$\ddot{\vartheta} - \frac{\lambda \cos(\vartheta)}{\sin^3(\vartheta)} - \frac{g}{r}\sin(\vartheta) = 0 \quad \Big| \cdot \dot{\vartheta}$$

$$\ddot{\vartheta}\,\dot{\vartheta} - \frac{\lambda \cos(\vartheta)}{\sin^3(\vartheta)}\,\dot{\vartheta} - \frac{g}{r}\sin(\vartheta)\,\dot{\vartheta}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{\lambda^2}{2\sin^2\vartheta} + \frac{g}{r}\cos(\vartheta)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\vartheta}^2 + \frac{\lambda^2}{\sin^2(\vartheta)} + \frac{2g}{r}\cos(\vartheta) = e}$$



Dichte $\rho(x, y, z)$

Masse $= \int dx \int dy \int dz \; \rho(x, y, z)$

Kugel

$\rho(r, \vartheta, \varphi)$

$dx\, dy\, dz \rightarrow r^2 dr \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$

$0 \leq r \leq R \qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$\Rightarrow$ Kugelvolumen

$$V = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin(\vartheta) d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 2\pi (-\cos\vartheta) \Big|_0^\pi \frac{r^2}{3} \Big|_0^R = \frac{4\pi}{3} R^3$$

Oberfläche :

$$\int_0^{\pi} r^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2$$

---

zur Nomenklatur :

$$d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$ „Raumwinkel"

$$\oint d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin(\vartheta)\, d\vartheta$$

<u>Subst.</u> $\cos(\vartheta) = x$

$$\Rightarrow dx = -\sin(\vartheta)\, d\vartheta \qquad \left|\begin{array}{l} \vartheta = 0 \rightarrow x = 1 \\ \vartheta = \pi \rightarrow x = -1 \end{array}\right.$$

$$\oint d\Omega = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{-1} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} d\cos(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\Rightarrow d\Omega = d\varphi\, d\cos(\vartheta)$$

Kugelflächenintegral: $\oint d\Omega \, f(\vartheta, \varphi) \ldots$

Volumenintegral: $\int_V r^2 dr \, d\Omega \, f(r, \vartheta, \varphi)$

Ebenes math. Pendel

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin(\varphi) = 0}$$

$$\xrightarrow{\times \dot{\varphi}} \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{g}{l}\cos(\varphi)\right) = 0$$

Kleine Schwingungen $\sin(\varphi) \simeq \varphi$

$\Rightarrow$ linearisiertes Pendel

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0}$$ ← Harmonischer Oszillator

allgemeine Lsg.:

$$\varphi(t) = A \sin(\omega \cdot t) + B \cos(\omega \cdot t)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$$

Komplexe Zahlen

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$$

Ansatz: $\varphi(t) = A\cos(\omega \cdot t) + B\sin(\omega \cdot t)$

Anfangsbed.: $(t=0)$

$$A = \varphi(t=0) = \varphi_0$$

$$\omega B = \dot{\varphi}(t=0) = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Wähle C, δ:

$$\varphi_0 = A = C \cdot \cos(\delta) \qquad \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega} = -C \cdot \sin(\delta)$$

Anderer Ansatz:

$$\varphi(t) \sim e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi}(t) \sim \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{-\omega^2}$$

nicht reell lösbar, daher Einführung der komplexen Zahlen

$$\boxed{i^2 := -1}$$

$$\lambda = \pm i\omega \Rightarrow x^2 = i^2\omega^2 = -\omega^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(t) = a e^{i\lambda t} + b e^{-i\lambda t}}$$

<u>Definition:</u> (komplexe Zahlen $\mathbb{C}$)

Sei $x, y \in \mathbb{R}$, dann heißt die Menge aller

$$z = x + iy$$

die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, mit den Eigenschaften

a) Addition: $z = x + iy$, $w = a + ib$

$$z + w = (x+a) + (y+b)i$$

b) Multiplikation: ebs.

Bemerkungen und Bezeichnungen :

i) Man stellt sich $\mathbb{C}$ als Punkt i.d. Ebene vor

ii) Man bezeichnet den Realteil von z

$$Re(z) = x$$

und den Imaginärteil von z

$$Im(z) = y$$

iii) $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, so heißt $z^* = x - iy$ das konjugiert komplexe in z (alt. $\overline{z}$)

a) $(z^*)^* = z$

b) $(z+w)^* = z^* + w^*$

c) $(zw)^* = z^* w^*$

d) $Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$; $Im(z) = \frac{1}{2}(z - z^*)$

iv) $z z^* = x^2 + y^2$ Es ist daher

$$|z| = \sqrt{z z^*} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$$

der Betrag von z

$$Arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

v) Inverses

$$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

vi) a) $|z \cdot w| = |z||w|$

b) Dreiecksungleichung

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

vii) $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$

$= |z| \left(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \right); \quad \varphi = \mathrm{Arg}(z)$

Potenzreihen über $\mathbb{C}$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \rightsquigarrow \quad z \in \mathbb{C} : \exp(z) = \frac{1}{n!} z^n = 1 + \frac{z^2}{2} + z + \frac{z^3}{6} \dots$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \dots$$

$$\cos(z) = \sum \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} \dots$$

$$\exp(iz) = 1 + iz + \frac{-z^2}{2} - i \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}$$

$$\exp(-iz) = 1 - iz - \frac{z^2}{2} + i \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}$$

$$\Rightarrow \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

$$x \in \mathbb{R} \;:\; e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Bemerkung

a) $z \in \mathbb{C} \;:\; \left(e^{z}\right)^{*} = e^{z^{*}}$

b) $x \in \mathbb{R} \;:\; \left(e^{ix}\right)^{*} = e^{(ix)^{*}} = e^{-ix} = \frac{1}{e^{ix}} \Rightarrow \left|e^{ix}\right| = 1$

Satz:

a) Ist $z \in \mathbb{C}$, so $\exists\, r \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $z = r \cdot e^{i\varphi}$

Bew. Sei $z \neq 0$; Setze $r = |z|$, dann

$\left|\frac{z}{r}\right| = 1$; Schreibe $\frac{z}{r} = a + ib$

$a^2 + b^2 = 1$

Dann ist $-1 \leq a \leq 1$, $\alpha := \arccos(a)$
und $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$ . . .

. . .

b) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

c) Ist $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, so gibt es genau n verschiedene Lsg $\omega_k \in \mathbb{C}$ mit

$$\omega_k^n = z$$

Praktische Betrachtungen

$$\cos(ix) = \frac{1}{2}\left(e^{iix} + e^{-iix}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} + e^{x}\right) = \cosh(x)$$

$$\sin(ix) = \frac{1}{2i}\left(e^{iix} - e^{-iix}\right) = \frac{i}{2i^2}\left(e^{-x} - e^{x}\right)$$
$$= i \sinh(x)$$

$$\cos(x+iy) = \cos(x) \cdot \cos(iy) - \sin(x)\sin(iy)$$
$$= \cos(x)\cosh(y) - i \sin(x)\sinh(y)$$

$$\mathrm{Re}\left[\cos(x+iy)\right] = \cos(x)\cosh(y)$$

$\vdots$

$\sin(x+iy)$ . . .

$\vdots$

$$\sinh(ix) = i \sin(x)$$
$$\cosh(ix) = \cos(x)$$

Lsg. d. DGl (Schwingung)

$$\varphi(t) = a \cdot e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t}$$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\left(z + z^*\right)$$

$\Rightarrow \varphi^*$ ist auch Lsg

Gedämpfter Harmonischer Oszillator

$$\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

char. Gl.

$$\lambda^2 + k\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda = -\frac{k}{2} \pm i\omega \qquad ; \ \omega := \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k}{4}}$$

$$\varphi(t) = A e^{-\frac{k}{2}t} + B e^{-\frac{k}{2}t} e^{-i\omega t}$$

$\varphi^*(t)$ ist auch Lsg.

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Re}(\varphi),\ \mathrm{Im}(\varphi) \text{ sind Lsg}}$$

$$\varphi(0) := \varphi_0 \qquad \dot{\varphi}(0) := u$$

$$\Rightarrow \quad A + B = \varphi_0 \qquad (1)$$

$$(2) \quad \left(-\frac{k}{2} + i\omega\right)A + B\left(-\frac{k}{2} - i\omega\right) = u$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{k}{2}\varphi_0 + i\omega(A - B) = u$$

$$\Leftrightarrow \quad i\omega(A - B) = u + \frac{k}{2}\varphi_0$$

$$- \qquad A + B = \varphi_0 \qquad | \cdot i\omega$$

$$-2i\omega B = u + \left(\frac{k}{2} - i\omega\right)\varphi_0$$

$$B = i\frac{u}{2\omega} + \varphi_0\left(\frac{1}{2} + i\frac{k}{4\omega}\right)$$

$$A = -i\frac{u}{2\omega} + \varphi_0\left(\frac{1}{2} - i\frac{k}{4\omega}\right) = B^*$$

$$\varphi(t) = e^{-\frac{k}{2}t}\left[\frac{1}{2}\varphi_0\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) - i\cdot\frac{1}{2\omega} \dots\right.$$

$$\left.\dots\left(u + \varphi_0\frac{k}{2}\right)\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)\right]$$

$$= e^{-\frac{k}{2}t}\left(\varphi_0\cos(\omega t) + \frac{u + \varphi_0\frac{k}{2}}{\omega}\sin(\omega t)\right)$$

$$\xrightarrow[\text{aperiod. Grenzfall}]{\omega \to 0} e^{-\frac{k}{2}}\left[\varphi_0 + t\left(u + \frac{k\varphi_0}{2}\right)\right]$$

$$e^{-\frac{k}{2}t} \qquad t\cdot e^{-\frac{k}{2}t}$$

[Doppelte Nullstellen des char. Polynoms]*!?)

aperiodischer Grenzfall für $k = 2\omega_0$

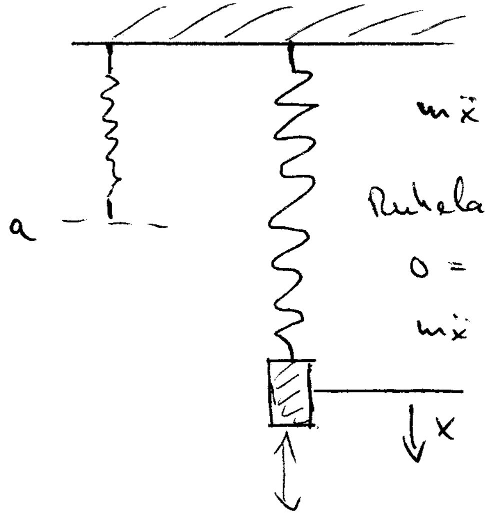
* kann nicht zwei Anfangsbed. erfüllen

$$\frac{\sin(\omega t)}{\omega} \xrightarrow{\omega \to 0} t$$ wegen Taylorreihen

$$k > 2\omega_0 \rightsquigarrow \lambda_\pm = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k}{4} - \omega_0^2}$$

$$\varphi(t) = A \cdot e^{\left(-\frac{k}{2} + \sqrt{\dots}\right) t} + B e^{\left(-\frac{k}{2} - \sqrt{\dots}\right) t}$$

für $k = 2\omega_0$



$$m\ddot{x} = -mg - f\cdot(x-a)$$

Ruhelage sei $x = 0$:

$$0 = -mg + af$$

$$m\ddot{x} = -fx$$

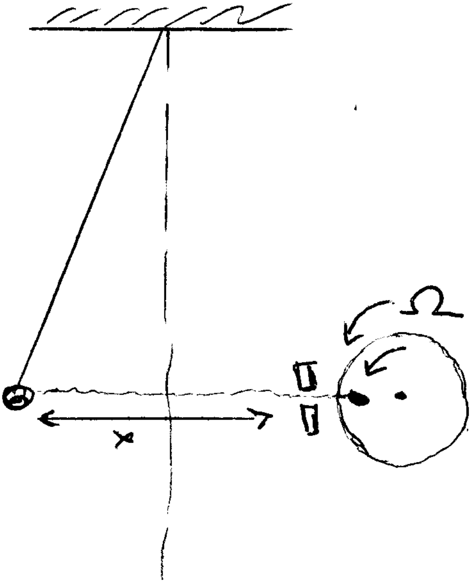
$$\ddot{x} + \frac{f}{m}x = 0 \qquad \omega^2 = (2\pi f)^2 = \frac{f}{m}$$

Schwingende Masse + Dämpfung:

$\ddot{x} + \frac{f}{m} x = -k\dot{x}$ $\qquad$ $\ddot{x} + k\dot{x} + \frac{f}{m} x = 0$

(wie beim angenäherten Fadenpendel)

Erzwungene harmonische Schwingung:



I $\boxed{\ddot{x} + k\dot{x} + \omega_0^2 x = A\sin(\Omega t)}$

→ inhomogene lin. DGl. mit konst. Koeff.

II $\ddot{x} + k\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

ist die zugehörige homogene DGl

Es sei $x_I(t)$ eine Lsg von I

und $x_{II}(t)$ " " " II

dann ist auch $A \cdot x_{II}(x) + x_I(x)$ eine Lsg. von I

⇒ Lösungsverfahren

Finde (mit dem Exponentialansatz) die allgem. Lsg. der homogenen DGl und rate (wenn du kannst), eine spez. Lsg. der inhomog. DGl.

Dann löst $x(t) = x_I + x_{II}$ die inh. DGl <u>und</u> stellt zwei Koeffizienten bereit, um zwei Anfangsbed. zu erfüllen.

III $\ddot{x} + k\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cdot e^{i\Omega t}$ | jetzt mit komplex. Motor

x sei Lösung; dann ist x^* Lsg von

$$\ddot{x}^* + k\dot{x}^* + \omega_0^2 x^* = A^* e^{-i\Omega t}$$

~~$\frac{d^2}{dt^2}\left[\text{Im}(x)\right]$~~

$\rightsquigarrow$ $x + x^*$ = Lösung von $\left(\frac{d^2}{dt^2} + k\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)\frac{(x+x^*)}{2})$

$\xrightarrow{A=|A|e^{i\delta}}$

$$\frac{1}{2}|A|\left(e^{i(\Omega t+\delta)} + e^{-i(\Omega t+\delta)}\right)$$

$$= |A|\cos(\Omega t+\delta)$$

Lsg raten zu III:

Ansatz: $x = x_0 \cdot e^{i\Omega t}$

$\dot{x} = i\Omega x$

$\dot{x} = -\Omega^2 x$

$$(-\Omega^2 + i\Omega k + \omega_0^2)\, x_0\, \cancel{e^{i\Omega t}} = A\cdot \cancel{e^{i\Omega t}}$$

$$x_0 = \frac{A}{-\Omega^2 + i\Omega k + \omega_0^2}$$

$$x_{spez} = X_0 \cdot e^{i\Omega t}$$

allgem. Lsg.:

$$x(t) = \frac{A \cdot e^{i\Omega t}}{-\Omega^2 + i\Omega k - \omega_0} + e^{-\frac{k}{2}t}\left(\alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}\right)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{4}}$$

4.6.04 Theo

$$\ddot{\varphi} + 2\kappa\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = Ae^{i\Omega t}$$

$$\psi : \mathrm{Im}(\varphi)$$

$$\boxed{\ddot{\psi} + 2k\dot{\psi} + \omega_0^2\psi = A\cdot\sin(\Omega t)}$$

$$\varphi = \underbrace{\left(\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)\right)e^{-\kappa t}}_{\text{homog. Lsg.}} + \underbrace{Be^{i\Omega t}}_{\text{spez. Lsg.}}$$

$\Rightarrow$

$$Be^{i\Omega t}\left[-\Omega^2 + 2i\kappa\Omega + \omega_0^2\right]B = Ae^{i\Omega t}$$

$$\Leftrightarrow \quad B = A\frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\kappa\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 4\kappa^2\Omega^2} \; ; \; |B| = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\kappa^2\Omega^2}}$$

Im eingeschwungenen Zustand ist die Lsg $\varphi = Be^{i\Omega t} = |B|e^{i(\Omega t+\delta)}$

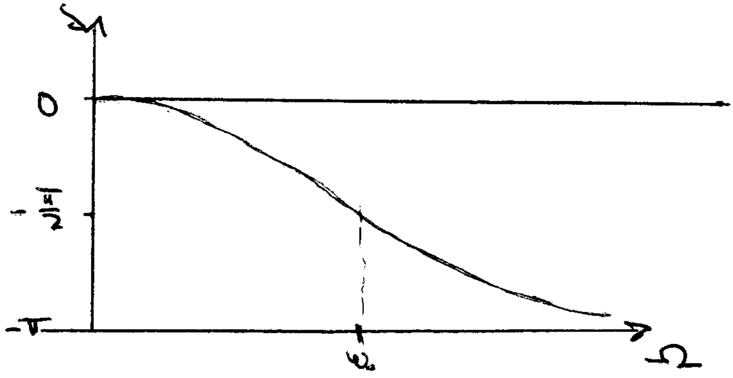
die homog. Lsg trägt für $t \to \infty$ nich mehr bei

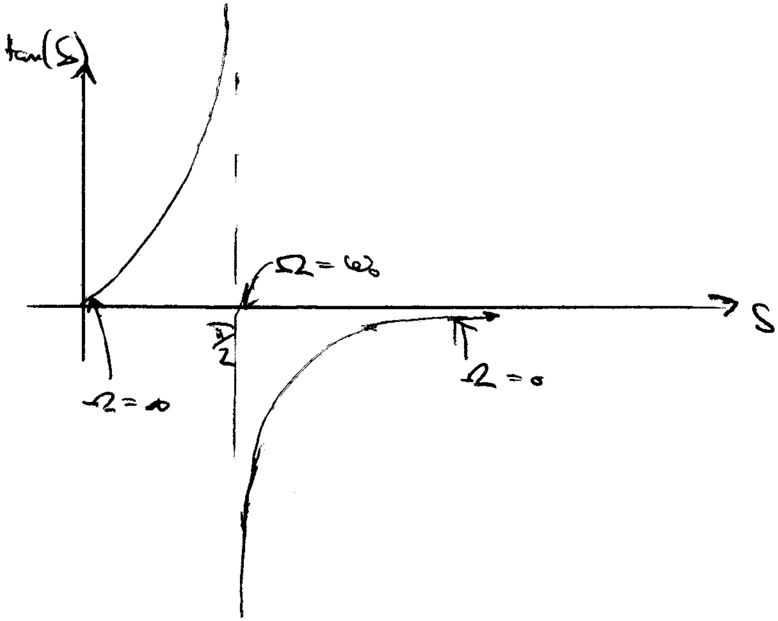
$$\psi = \mathrm{Im}(\varphi) = |B|\sin(\Omega t + \delta)$$

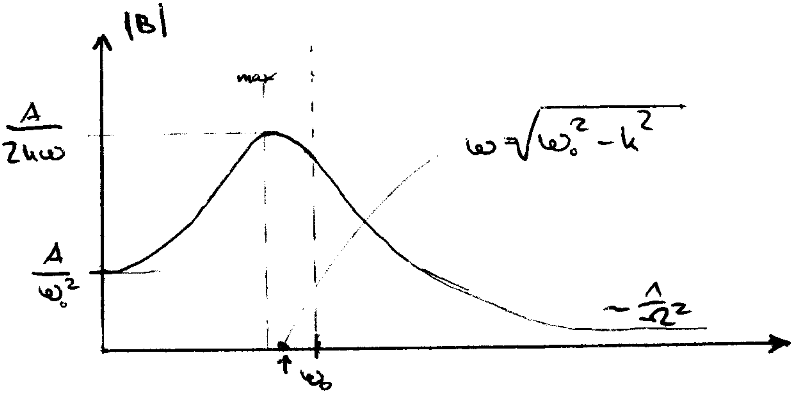
$\uparrow$ Phasenverschiebung

$$\tan(\delta) = \frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}} = \frac{2k\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

$$\tan(\delta) = \frac{2k\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$







Extremwert von $|B|(\Omega)$ (Maximum)

Maximum von $|B|(\Omega)$ wird erreicht wenn das Minimum erreicht wird von

$$f = (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4k^2\Omega^2$$

$$f' = 2\cdot 2(\omega_0^2 - \Omega^2)\Omega + 8k^2\Omega \overset{!}{=} 0$$

$$\Omega_1 = 0$$

$$+\omega_0^2 - \Omega^2 - 2k^2 = 0$$

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2k^2}$$

Extremwert nur für $\omega_0 > \sqrt{2}\cdot k$

vgl. [illegible] aperiodischer Grenzfall: $\omega_0 = k$

$$|B|_{max} = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\kappa^2)^2 + 4\kappa^2(\omega_0^2 - 2\kappa^2)}\,\sqrt{\omega_0^2 - 2\kappa^2}}$$

$$= \frac{A}{2\kappa\omega}$$

Energie - Dissipation

$$\ddot\psi + 2\kappa\dot\psi + \omega_0^2\psi = f$$

Arbeit $f \cdot d\psi$

Leistung $f \cdot \frac{d\psi}{dt} = f \cdot \dot\psi$

$$\underline{\ddot\psi\dot\psi} + 2\kappa\dot\psi^2 + \omega_0^2\,\underline{\psi\dot\psi} = f \cdot \dot\psi$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}\dot\psi^2}_{E_{kin}} + \underbrace{\tfrac{\omega_0^2}{2}\psi^2}_{E_{pot}}\Big) + 2\kappa\dot\psi^2 = f\dot\psi$$

Zeitliche Mittlung über eine Periode $\frac{2\pi}{\Omega}$

$$\frac{1}{T}\int_0^T\Big[\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}\dot\psi^2 \ldots\Big) + 2\kappa\dot\psi^2 - f\dot\psi\Big]\,dt = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{2T}\left(\dot\psi^2 + \omega_0^2\psi^2\right)\Big|_0^T}_{0} + \frac{1}{T}\int_0^T\left(2\kappa\dot\psi^2 - f\dot\psi\right)dt = 0$$

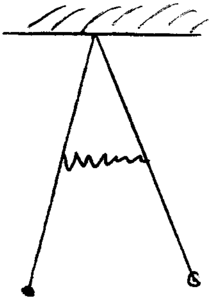
$$\frac{1}{T}\int_0^T 2k\,\dot\psi\,dt := \overline{2k\,\dot\psi^2}^{\,t} = \underbrace{\overline{f\,\dot\psi}^{\,t}}_{N \text{ (leistung)}}$$

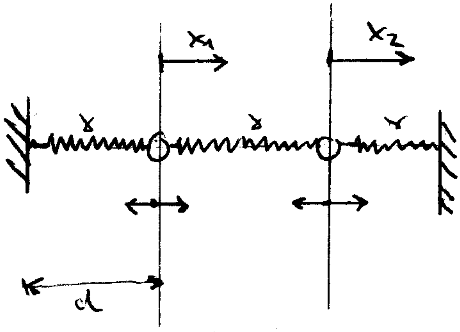
$$\overline{N} = 2k\,\overline{\dot\psi^2}^{\,t} \quad ; \quad \begin{aligned} \psi &= |B| \sin(\Omega t + \delta) \\ \dot\psi^2 &= |B|^2 \Omega^2 \cos^2(\Omega t + \delta) \\ \overline{\dot\psi^2}^{\,t} &= \frac{1}{2}\Omega^2 |B|^2 \end{aligned}$$

$$\overline{N}^{t} = k\,\Omega^2 |B|^2$$

$$\overline{\cos^2(\ldots)}^{\,t} = \frac{1}{2} \qquad \overline{\cos^2(\,)}^{\,t} = \overline{\sin^2(\,)}^{\,t}$$

Gekoppelte Schwingungen





$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\gamma x_1 + \gamma(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= -\gamma x_2 + \gamma(x_1 - x_2) \end{aligned}}$$

gekoppeltes System von Dgl

⇒ Exponentialansatz für x_1 und x_2

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a \cdot e^{+i\omega t} \\ x_2 &= b \cdot e^{i\omega t} \end{aligned}\quad\right| \text{ gleiches } \omega \text{ !}$$

$$\Rightarrow -m\omega^2 x_1 + \gamma x_1 - \gamma(x_2 - x_1) = 0$$

$$-m\omega^2 x_2 + \gamma x_2 - \gamma(x_1 - x_2) = 0$$

übergang zur char. Gleichung

a	b	
$-m\omega^2+2\gamma$	$-\gamma$	0
$-\gamma$	$-m\omega^2+2\gamma$	0

$$f_1 = -\gamma(d+x-\ell)$$

$$f_2 = \gamma(d+y-x-\ell)$$

$$f_3 = \gamma(d-\ell-y) \qquad \kappa := \gamma$$

$$m\ddot{x} = f_1+f_2 = \kappa(y-2x)$$

$$m\ddot{y} = -f_2+f_3 = \kappa(x-2y)$$

Potentielle Energie der gespannten Feder:

Arbeit, die an der Feder geleistet wird, ist

$$dV = -f_1 \cdot dx \quad \rightsquigarrow V(x) = \int_0^x -f_1 \cdot dx'$$

$$= +\kappa \int_0^x (d+x'-\ell)\, dx' = +\frac{\kappa}{2}\left[(d+x-\ell)^2-(d-\ell)^2\right]$$

$$f_1 = -\frac{dV}{dx} = -k(d+x-l)$$

ohne Vorspannung: $d = l$

$\rightsquigarrow V = \frac{k}{2}x^2$, $f = -kx$

a	b	r
$m\omega^2 - 2k$	k	0
k	$m^2\omega^2 - 2k$	0

$a = b = 0$

$\Rightarrow$ triviale lösung

oft nur triviale lösung, es sei denn für den Spezialfall der lin. Abhängigkeit

→ ω ist entsprechend zu bestimmen

$$(m\omega^2 - 2k)^2 = k^2$$

$$m\omega^2 = 2k \pm k$$

$$m\omega^2 = \begin{cases} 3k \\ k \end{cases}$$

$$\omega = \begin{cases} \pm\sqrt{\frac{3k}{m}} \\ \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

$$a_\pm \overset{!}{=} 1 \qquad \rightsquigarrow \quad b_\pm = \frac{2k - m\omega^2}{k} a_\pm$$

$$b = \begin{cases} -1 \cdot a_\pm \\ 1 \cdot a_\pm \end{cases}$$

Vollständige Lsg.

$$x = a_\pm \cdot e^{i\omega_+ t} + a_+^* e^{-i\omega_+ t} + a_- \cdot e^{i\omega_- t} + a_-^* e^{-i\omega_- t}$$

$$y = -a_+ \cdot e^{i\omega_+ t} - a_+^* e^{-i\omega_+ t} \; a_- \cdot e^{i\omega_- t} + a_-^* e^{-i\omega_- t}$$

Reell: $x = A\cos(\omega_+ t + \delta) + B\cos(\omega_- t + \delta')$

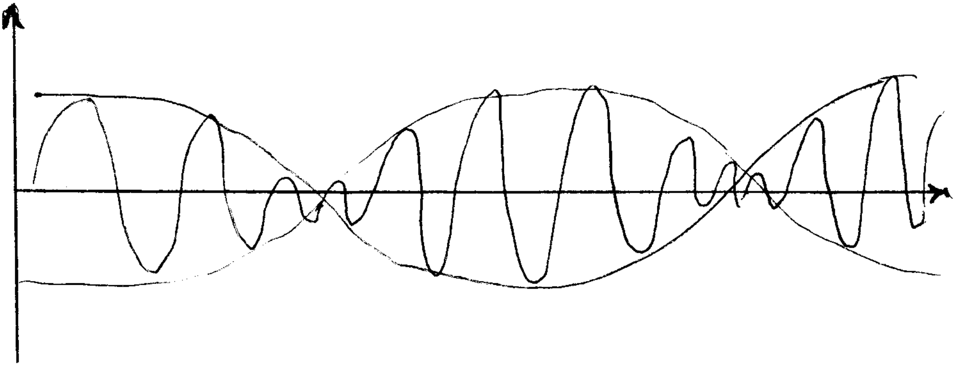
$$y = -A\cos(\omega_+ t + \delta) + B\cos(\omega_- t + \delta')$$

Spezialfall: (Schwebungen)

$A = B = 1 \qquad \delta = \delta' = 0$

$$\begin{aligned} x &= \cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t) \\ &= 2\cos\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t\right) \\ &= 2\cos(\Omega t) \cdot \cos(\Delta t) \qquad \Delta \ll \Omega \end{aligned}$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$$



$$y = -\cos(\omega_+ t) + \cos \omega_0 t$$

$$= 2 \sin(\Omega t) \cdot \sin(\Delta t)$$

Vektor:

Koordinaten sind basisabhängig

Transformation: $x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$

$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{m_{11}}{\cos\varphi} & \overset{m_{12}}{-\sin\varphi} \\ \overset{m_{21}}{\sin\varphi} & \overset{m_{22}}{\cos\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$r'_j = \sum_{k=1}^{2} m_{jk}\, r_k \quad ; \quad \vec{r}\,' = \overline{\overline{m}} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{r}\,'' = \overline{\overline{b}}\, \vec{r}\,' = \overline{\overline{b}}\, \overline{\overline{a}} \cdot \vec{r} \quad \rightsquigarrow$$

$$\vec{r}\,'' = \overline{\overline{c}} \cdot \vec{r}$$

$$\left.\begin{aligned} r''_j &= \sum b_{jk}\, r'_k = \sum b_{jk}\, a_{kl}\, r_l \\ r''_j &\overset{!}{=} \sum_l c_{jl}\, r_l \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow$$

$c_{jl} = \sum_k b_{jk}\, a_{kl}$ ~~Vektormul~~ Matrizenmultiplikation

$\boxed{\text{Zeilen} \times \text{Spalten}}$ Die Multiplikation ist nicht kommutativ

$$a \cdot a^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rechtsinverses = linksinverses

Koordinaten-unabhängige Bedeutung

Transformationen:

Vektor $\Leftrightarrow$ Tripel

Tensor $\Leftrightarrow$ Matrix "geometrische Matrix"

Transformationsgesetz:

es sei $\vec{b} = \overline{\overline{m}} \cdot \vec{a}$

$\vec{a}' = T \cdot \vec{a}$, $\vec{b}' = T \cdot \vec{b}$

Forderung: $\overline{\overline{m}}'$: $\vec{b}' = \overline{\overline{m}}' \cdot \vec{a}'$

$$T \vec{b} = \overline{\overline{m}}' \cdot T \vec{a} \qquad | \cdot T^{-1}$$

$$\vec{b} = \left(T^{-1} \overline{\overline{m}} \, T \right) \vec{a}$$

Matrizen

$\vec{r}\,' = \overline{\overline{m}}\,\vec{r}$

Drehung um die z-Achse $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Streckung in z-Richtung $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Abbildungen sind i. A. nicht kommutativ

$$\underline{\vec{a} = \overline{\overline{m}} \cdot \vec{b}}$$

$\vec{a} \rightarrow \vec{a}\,' = T\vec{a}$

$\vec{b} \rightarrow \vec{b}\,' = T\vec{b}$

wenn gelten soll:

$\vec{a}\,' = \overline{\overline{m}}\,' \cdot \vec{b}\,'$

dann ist $\overline{\overline{m}}\,' = T\,\overline{\overline{m}}\,T^{-1}$

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$\overline{\overline{m}}^T :=$ an der Hauptdiagonalen gespiegelt

$(AB)^T = B^T \cdot A^T$

Invariante Eigenschaften von Matrizen

Determinante der Matrix : $\det(\bar{\bar{m}}) = |\bar{\bar{m}}| = \|\bar{\bar{m}}\|$

„Volumensvergrößerungselement“

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \qquad \bar{\bar{A}} \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix} \quad \bar{\bar{A}} \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix} \quad \bar{\bar{A}} \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix}$$

wenn das Volumen 0 wird bei der Abb.:

$\det(A) = 0 \Longleftrightarrow$ Die Spaltenvektoren liegen in einer Ebene, sind lin. abhängig

Im 3D-Raum gilt:

$$V = [\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3] := \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$$

$$\begin{array}{ccc} + & + & - \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} {}^{+}a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \det A$$

$$\overline{\overline{A}} = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3) \longrightarrow (\vec{a}_1 + \lambda \vec{a}_2 + \mu \vec{a}_3 , \vec{a}_2 , \vec{a}_3)$$

$$\det (\ " \ ) = \det (\ " \ )$$

$$\det (AB) = \det (A) \cdot \det (B) = \det (BA)$$

$$A A^{-1} = \underline{I}$$

$$\rightsquigarrow \det A \ \det A^{-1} = 1 \quad \rightsquigarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

$$\det A = \det A^T$$

<u>Spur einer Matrix</u>

$Sp(A) = Tr(A) = \sum A_{ii}$ = Summe d. Hauptdiag.

$$Sp(A \cdot B) = Sp(B \cdot A)$$

$$\sum_k A_{ik} B_{ki} = \sum_{ki} B_{ik} A_{ki}$$

$$= \sum_{k,i} A_{ki} B_{ki} \xrightarrow{i \leftrightarrow k} \sum_{k,i} A_{ik} B_{ki}$$

$$Sp(A') = Sp(T A T^{-1}) = Sp(T^{-1} T) = Sp(A)$$

$$Det(A') = Det(T A T^{-1}) = Det(T) \cdot Det(A) \cdot Det(T^{-1})$$

$$= Det(A)$$

Gleichungssystem

$$\overline{\overline{m}} \; \vec{r} = \vec{a}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{m}} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{21} & \ldots & \\ \ldots & & m_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} m_{11}x + m_{12}y + m_{13}z &= a \\ m_{21}x + m_{22}y + m_{23}z &= b \\ m_{31}x + m_{32}y + m_{33}z &= c \end{aligned}$$

Lösen heißt: Suche den Vektor $\vec{r}$

sodass $\overline{\overline{m}} \cdot \vec{r} = \vec{a}$

Ergebnis : $\vec{r} = \overline{\overline{m}}^{-1} \cdot \vec{a}$

wenn $\overline{\overline{m}}^{-1}$ ex. d.h. $\det(\overline{\overline{m}}) \neq 0$

Das inhomogene Gleichungssystem $\overline{\overline{m}}\vec{r} = \vec{a}$ hat eine eindeutige Lsg. für jedes $\vec{a}$ wenn $\det(\overline{\overline{m}}) \neq 0$ ist

Homogenes Gl. System

$\vec{m}\,\vec{r} = \vec{0}$

$$\underbrace{(m_{11}, m_{12}, m_{13})}_{\vec{m}_1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a$$

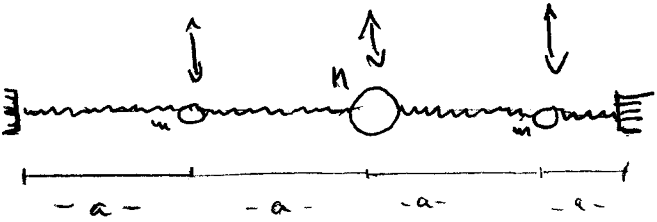
Lösung: eine Ebene $\perp$ $\vec{m}_1$ mit | Ebene mit $\vec{m}_1$ als normale

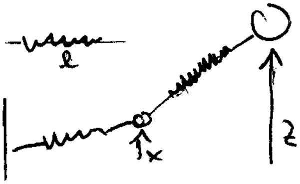
Abstand $\frac{a}{|\vec{m}_1|}$ von Ursprung

hom. System

det $\neq 0$ $\leadsto$ nur die "triviale" Lsg

det $= 0$ $\leadsto$ unendl. viele Lsg (einparametrisch oder zweiparametrisch)





$$m\ddot{x} = k'\left(\sqrt{a^2+(z-x)^2}-l\right)\frac{z-x}{\sqrt{a^2+(z-x)^2}}$$

$$-\left(k'\sqrt{a^2+x^2}-l\right)\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

Linearisierung

$$\simeq \underbrace{k'\left(1-\frac{l}{a}\right)}_{k}(z-2x) = k\,(z-2x)$$

(nur Terme 1. Ordnung)

$$M\ddot{z} = k\,(x-z+y-z) = k\,(x+y-2z)$$

$$m\ddot{y} = k\,(z-2y)$$

→ Gleichungssystem

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= k(z-2x) \\ M\ddot{z} &= k(x+y-2z) \\ m\ddot{y} &= k(z-2y) \end{aligned}}$$

Ansatz (Expo.):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

$$-m\omega^2 x_0 = k(z_0 - 2x_0)$$

$$-M\omega^2 z_0 = k(x_0 + y_0 - 2z_0)$$

$$-m\omega^2 y_0 = k(z_0 - 2y_0)$$

x_0	y_0	z_0	r
$2\cancel{k} - \frac{m}{k}\omega^2$		$-\cancel{k}1$	0
	$2\cancel{k} - \frac{m}{k}\omega^2$	$-\cancel{k}1$	0
$-\cancel{k}1$	$-\cancel{k}1$	$2\cancel{k} - \frac{M}{k}\omega^2$	0

$a := \frac{m}{k}\omega^2 - 2$

$A := \frac{M}{k}\omega^2 - 2$

$\Rightarrow$

x_0	y_0	z_0	r
a	0	1	0
0	a	1	0
1	1	A	0

$$\det() \overset{!}{=} 0$$

$$Aa^2 - 2a \overset{!}{=} 0$$

i) $a = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{2k}{m}$

ii) $Aa = 2$

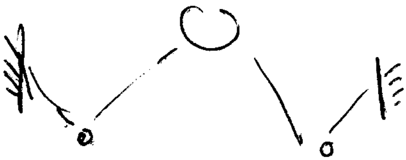
$$\Rightarrow \left(\frac{m}{k}\omega^2 - 2\right)\left(\frac{M}{k}\omega^2 - 2\right) \overset{!}{=} 2$$

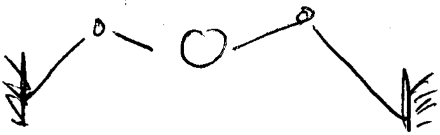
$$\frac{Mm}{k^2}\omega^4 - \frac{2(m+M)}{k}\omega^2 + 2 = 0 \longrightarrow$$

$$\omega_{2/3}^2 = \ldots = \frac{1}{Mm}k\left(M+m \pm \sqrt{(M+m)^2 - 2Mm}\right)$$

$$= \frac{k}{Mm}\left(M+m \pm \sqrt{M^2+m^2}\right)$$

Ergebnis: 3 Schwingungen, wie erwartet





i) $\omega^2 = \omega_1^2 = \frac{2k}{m}$

x_0	y_0	z_0	r	
0	0	1	0	$\xi = 0$
0	0	1	0	
1	1	$2(\frac{4M}{m}-1)$	0	$y_0 = -x_0$

iii), ii) $\omega^2 = \omega_2^2 = \frac{k}{Mm}\left(+\sqrt{M^2+m^2}+M+m\right)$

x_0	y_0	z_0	r	
a	0	1	0	
0	a	1	0	lin abh.!
~~1~~	~~1~~	~~2/a~~	~~0~~	eine Gl. streichen

z_0 als freier Parameter einführen

$$x_0 = -\frac{z_0}{a}$$

$$y_0 = -\frac{z_0}{a} \qquad \Rightarrow x_0 = y_0$$

$$a = \frac{m\omega^2}{k} - 2$$

$$a = a_{2/3} = \frac{m\omega_{2/3}^2}{k} - 2$$

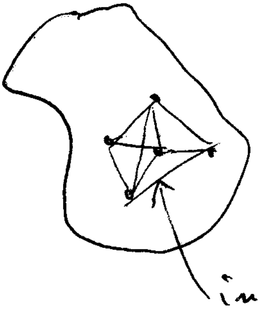
$$a_{2/3} = \frac{m\omega_{2/3}^2}{k} - 2 = -1 + \frac{m}{M} \pm \sqrt{1 + \frac{m^2}{M^2}} \qquad ; \mu := \frac{m}{M}$$

$$= \underbrace{\mu - 1}_{<\mu, <1} \pm \underbrace{\sqrt{1+\mu^2}}_{>\mu, >1} \qquad \mu < 1$$ (dicke in der Mitte

$$a_2 > 0 \qquad a_3 < 0$$

Die drei erwarteten Lsg. sind eingetroffen

Starrer Körper



= "Massenpunkte + Gestänge"

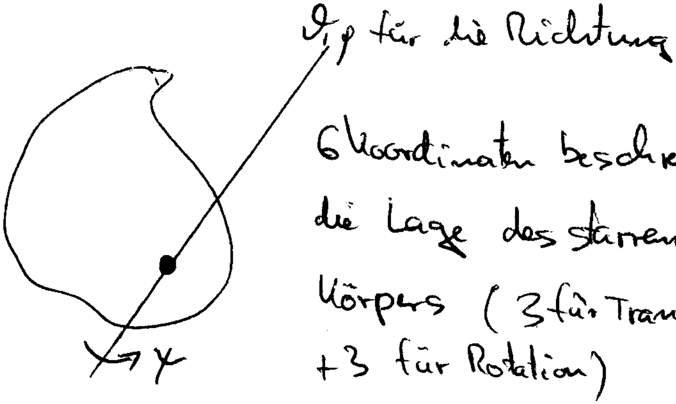
$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \sum_j \vec{f}_{ij} + \vec{f}_i^{(e)}$$

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad M = \sum m_i$$

$$\boxed{M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}} \qquad F = \sum \vec{f}_i^{(e)}$$

$$\vec{L} := \sum_i m\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \Longrightarrow$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}^{(e)} := \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_i^{(e)}$$



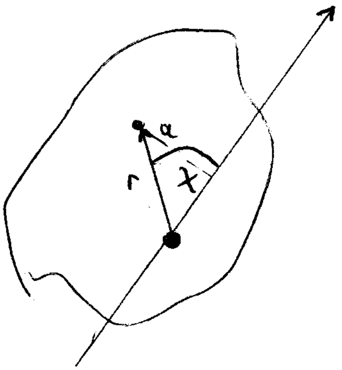
6 Koordinaten beschreiben die Lage des starren Körpers (3 für Translation + 3 für Rotation)

Geschwindigkeit

Translation: $\dot{\vec{R}}$

Rotationsgeschw.: $\Omega = \dot{\psi}$ um die Achse
in Richtung $\vec{e}_\Omega(\vartheta, \varphi)$

Geschwindigkeit eines bel. Punktes?



a = Abstand v. d. Drehachse (senkrecht)

r = Abstand zum Bezugspunkt

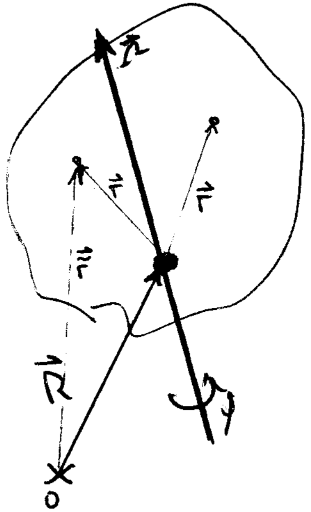
$v = a \cdot \Omega$; $a = |\vec{r}| \cdot \sin(x)$

$\vec{v} \perp \vec{e}_\Omega, \vec{r}$

$$\Rightarrow v = \underbrace{\Omega \vec{e}_\Omega}_{} \times \vec{r}$$

$:= \vec{\Omega}$ Winkelgeschwindigkeitsvektor
zeigt in Richtung momentane Drehachse
und hat den Betrag $\dot{\psi}$

Rotation des starren körpers



$|\vec\Omega| = \dot\varphi$

$$\dot{\vec r} = \dot{\vec R} + \vec\Omega \times \vec r$$

1.) Freie Bewegung im Raum

$\Rightarrow$ $\vec R$ sei Ortsvektor des Schwerpunktes

2.) Aufgehängt in P

$\vec R$ = Ortsvektor von $\vec P$

$\ldots \quad O \equiv \vec P \rightsquigarrow \vec R \equiv 0$

Drehimpuls

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec L = \vec M} = \sum_i \vec r_i \times \vec f_i$$

$$\vec{L} = \int dm\, \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \int dm \left(\vec{R} + \vec{r}\right) \times \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \,)$$

$$\cancel{= \int} = \vec{R} \times \dot{\vec{R}} \underbrace{\int dm}_{m} + \vec{R} \times \Big(\vec{\Omega} \times \underbrace{\int dm\, \vec{r}}_{0}\Big)$$

$$+ \underbrace{\left(\int dm\, \vec{r}\right)}_{0} \times \dot{\vec{R}} + \int dm\, \vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

$$= m \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \int dm\, \vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

$$L = \int dm \left(\vec{\Omega} \cdot r^2 - r^2 \cdot (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}) \right)$$

$$L_i = \sum_{j=1}^{3} \Theta_{ij} \Omega_j$$

$$L_1 = \int dm \left(\Omega_1 \cdot (\cancel{x^2} + y^2 + z^2) - x\,(\cancel{x\Omega_1} + y\Omega_2 + z\Omega_3) \right)$$

$$\Theta_{11} = \int dm \left(y^2 + z^2\right) \qquad \Theta_{12} = - \int dm\, xy$$

$$\Theta_{22} = \int dm\, (x^2 + z^2 \qquad \Theta_{13} = - \int dm\, xz$$

$$\Theta_{33} = \int dm \left(x^2 + y^2\right) \qquad \Theta_{21} = \Theta_{12}$$

- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\vec{b})$
- $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = (a \cdot b \cdot \sin\varphi)^2 = a^2 b^2 (1 - \cos^2\varphi)$

  $= a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

$$\Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & & \Theta_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = \overline{\overline{\Theta}} \cdot \vec{\Omega}$$

alle, die nicht in der Diag. stehen: Deviationsmomente

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \overline{\overline{\Theta}} \cdot \vec{\Omega} \qquad \text{kin. Energie}}$$

Beweis:

$$\int \frac{dm}{2} \cdot \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} \int dm \, (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2$$

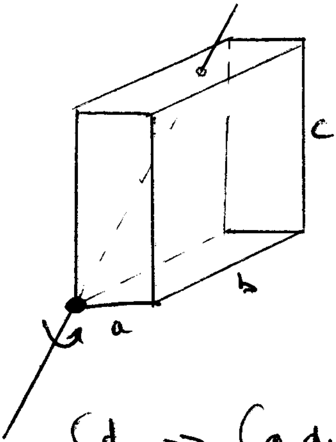
$$= \frac{1}{2} \int dm \left(\underbrace{\Omega^2}_{(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2)} (x^2 + y^2 + z^2) - \underbrace{(x\Omega_1 + y\Omega_2 + z\Omega_3)^2}_{\text{bin. Formel}} \right)$$

*

$$= \frac{1}{2} \Omega_1^2 \int dm \, (y^2 + z^2) + \dots$$

$$- \Omega_1 \Omega_2 \int dm \; xy \; + \dots$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Omega_i \, \Theta_{ij} \, \Omega_j$$



Bestimmung des Trägheitstensors eines Quaders

$$\int dm \rightarrow \int \rho \, dx \, dy \, dz \qquad \begin{cases} y^2 + z^2 \\ -xy \end{cases}$$

$$\rightarrow \rho \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz$$

$$\Theta_{11} = \rho a \left(\frac{b^3}{3} c + \frac{b c^3}{3} \right) = \rho \frac{abc}{3} \left(b^2 + c^2 \right)$$

$$= \frac{M}{3} \left(b^2 + c^2 \right)$$

$$\Theta_{12} = -\rho c \frac{a^2 b^2}{4} = -\frac{M}{4} ab$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \frac{b^2+c^2}{2} & -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2+c^2}{3} & -\frac{bc}{4} \\ -\frac{ac}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2+b^2}{3} \end{pmatrix}$$

$\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$ Trägheitstensor ist symmetrisch

Gesucht sind Achsenrichtungen, sodass

$\vec{L} \parallel \vec{\Omega}$ oder $\vec{L} = \lambda \vec{\Omega}$

$\overline{\overline{\Theta}} \cdot \vec{\Omega} \overset{!}{=} \lambda \vec{\Omega}$ "Eigenwertproblem"

Findet man eine Lösung, ist
λ ein Eigenwert und das zugehörige
$\vec{\Omega}$ ein Eigenvektor

Es sei $a \overset{!}{=} b \overset{!}{=} 4 \qquad c \overset{!}{=} 7$

$$\Theta = \frac{M}{4} \begin{pmatrix} 65 & -12 & -21 \\ -12 & 65 & -21 \\ -21 & -21 & 32 \end{pmatrix}$$

$$\left(\overline{\overline{\Theta}} - \lambda \cdot I\right) \vec{\Omega} = \vec{0}$$

$$\Theta - \lambda \cdot I = \begin{pmatrix} 65-\lambda & -12 & -21 \\ -12 & 65-\lambda & -21 \\ -21 & -21 & 32-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det = -\lambda^3 + 162\,\lambda^2 - 7359\,\lambda + 62678 \overset{!}{=} 0$$

$\lambda = 11, 74, 77$ Eigenwerte

Eigenvektoren

Der zu $\lambda = 11$ gehörige Eigenvektor

Ω_1	Ω_2	Ω_3	r
54	-12	-21	0
-12	54	-21	0
~~-21~~	~~-21~~	~~21~~	~~0~~
66	-66	0	0
$(54-12)\Omega_1$	$=$	$21\,\Omega_3$	

$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} \cdot 2 = 0$

$\Omega_2 = \Omega_1$

$\Omega_3 = 2\Omega_1$

$$\vec{\Omega}^{(1)} = \frac{(1,1,2)}{\sqrt{6}}$$

$\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \Omega^{3}$ stehen $\perp$

...

$$\vec{\Omega}^{(2)} = \frac{(1,1,-1)}{\sqrt{3}} \qquad \vec{\Omega}^{(3)} = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$$

Größe des Eigenvektors ist ein Maß für den Drehimpuls

$\Theta = \Theta^T$

wenn x und y Eigenvektoren von Θ zu verschiedenen Eigenwerten λ, μ sind

also $\Theta x = \lambda x \;|\cdot y$ dann gilt $x \cdot y = 0$

$\Theta y = \mu y \;|\cdot x$

$$y \cdot \Theta x - x\,\Theta y = (\lambda - \mu)\, x y \overset{!}{=} 0$$

$$\sum \Theta_{ij}\, y_i x_j - \sum \Theta_{ij}\, x_i y_j$$

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{L} = \overline{\overline{\Theta}} \cdot \vec{\Omega}$$

$$T = \frac{1}{2}\, \vec{\Omega} \cdot \overline{\overline{\Theta}} \cdot \vec{\Omega}$$

$$\left.\begin{aligned} \Theta_{11} &= \int dm\, (y^2 + z^2) \\ \Theta_{12} &= -\int dm\, xy \end{aligned}\right\} \text{beim Quader}$$

Hauptachsentransformation

Die neuen Einheitsvektoren sind die Hauptachsen der Drehung

$\Theta' = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}$; $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ - Hauptträgheitsmom.

$\vec{\Omega} = \Omega_1 \vec{e}_1$ geht über in

$\Theta \vec{\Omega} = \Theta \Omega_1 \vec{e}_1$; $\vec{e}_1$ = Drehachse (Hauptа.)

$T' = \frac{1}{2} \left(\Theta_1 \Omega_1^2 + \Theta_2 \Omega_2^2 + \Theta_3 \Omega_3^2 \right)$

Θ symmetrisch ; $\vec{x}, \vec{y}$ EV zu verschiedenen EW $\leadsto \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

Es sei $\overline{\Theta} \vec{x} = \lambda \vec{x}$ und $\overline{\overline{\Theta}} \vec{y} = \lambda \vec{y}$

$\leadsto \overline{\overline{\Theta}} (\vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda (x^2 + \mu y^2)$

sei $\Theta \vec{z} = \sigma \vec{z}$ mit $\sigma \neq \lambda$

Es sei $\vec{\Omega} = \frac{(4,4,7)_{alt}}{9} \cdot \Omega$

$$\vec{\Omega} = 0 \cdot \vec{e}_1 + \frac{\Omega}{9 \cdot \sqrt{3}} \cdot \vec{e}_2 + \frac{22\,\Omega}{9 \cdot \sqrt{6}} \vec{e}_3$$

$$= \frac{\Omega}{9} \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{22}{\sqrt{6}} \right)_{neu}$$

$$\vec{L} = \frac{M\Omega}{3 \cdot 9} \left(0, \frac{74}{\sqrt{3}}, \frac{11 \cdot 22}{\sqrt{6}} \right)_{neu}$$

Kräfte in den Lagern

$$\dot{\vec{L}} = \vec{\mathfrak{M}}$$

$$= \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

analog zu $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$

gilt für alle bel. Vektoren im System!

z.B. $\ddot{\vec{L}} = \Omega \times \dot{\vec{L}}$; $\dot{\vec{a}} = -\vec{a} \times \Omega$

$$\dot{\vec{L}} = \frac{M\Omega^2}{9 \cdot 27} \cdot \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{22}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{74}{\sqrt{3}} & \frac{242}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} \sim M\Omega^2 \vec{e}_1$$

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

$$\dot{\vec{v}} = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \Omega^2 \vec{r} - (\vec{\Omega} \cdot \vec{r})\, \vec{\Omega}$$

$$F = \int dm\, \dot{\vec{v}} = \Omega^2 \int \vec{r}\, dm - \left(\vec{\Omega} \cdot \int \vec{r}\, dm \right) \vec{\Omega}$$

$$\vec F = m\Omega^2\vec R - m(\vec\Omega\cdot\vec R)\cdot\vec\Omega$$

$$\vec L = (\Theta_1\Omega_1\ ,\ \Theta_2\Omega_2\ ,\ \Theta_3\Omega_3)_{mm}$$

$$\dot{\vec L} = \vec\Omega\times\vec L + (\Theta\dot\Omega_1\ ,\ \Theta\dot\Omega_2\ ,\ \Theta\dot\Omega_3)$$
$$= \vec M$$

$$\Theta_1\dot\Omega_1 = \Theta_3\Omega_2\Omega_3 - \Theta_2\Omega_3\Omega_2 + M_1$$
$$= \Omega_2\Omega_3(\Theta_2 - \Theta_3) + M_1$$

$$\Theta_2\dot\Omega_2 = \Omega_3\Omega_1(\Theta_3 - \Theta_1) + M_2$$

$$\Theta\dot\Omega_3 = \Omega_1\Omega_2(\Theta_1 - \Theta_2) + M_3$$

Euler

Freier Kreisel: $\vec M = \vec 0$

a) symmetrisch: $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta \neq \Theta_3$

$\dot\Omega_3 = 0 \curvearrowright \Omega_3 = \omega_3 = \text{const}$

$\dot\Omega_1 = \alpha\Omega_2$; $\alpha = \cancel{\omega_3(\Theta - \Theta_3}\ \ \omega_3\left(1 - \frac{\Theta_3}{\Theta}\right)$

$\dot\Omega_2 = -\alpha\Omega_1$

raten :

$$\Omega_1 = \omega \sin(\alpha t)$$

$$\Omega_2 = \omega \cos(\alpha t)$$

b) unsymmetrisch :

$$\dot{\Omega}_1 = \alpha \Omega_2 \Omega_3$$

$$\Omega_2 = \beta \Omega_1 \Omega_3$$

$$\dot{\Omega}_3 = \gamma \Omega_1 \Omega_2$$

$$\alpha = \frac{\Theta_2 - \Theta_3}{\Theta_1} \qquad \beta = \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_2}$$

$$\gamma = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_3}$$

$$t_0 \to \Omega_3$$

$$\dot{\Omega}_1 = \frac{d\Omega_1}{dt} = \frac{d\Omega_1}{d\Omega_3} \cdot \frac{d\Omega_3}{dt} = \gamma \Omega_1 \Omega_2 \frac{d\Omega_1}{d\Omega_3}$$

$$= \alpha \Omega_2 \Omega_3$$

$$\Omega_1 \cdot d\Omega_1 = \frac{\alpha}{\gamma} \Omega_3 \, d\Omega_3$$

$$\leadsto \quad \Omega_1^2 = \frac{\alpha}{\gamma}\left(\Omega_3^2 - \omega_1^2\right)$$

$$\Omega_2^2 = \frac{\beta}{\gamma}\left(\Omega_3^2 - \omega_2^2\right)$$

$$\dot{\Omega}_3 = \gamma\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\left(\Omega_3^2 - \omega_1^2\right)\left(\Omega_3^2 - \omega_2^2\right)}$$

$\Theta_1 < \Theta_2$ $\qquad$ $\gamma < 0$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i)}\ \Theta_3 < \Theta_1 < \Theta_2 & \alpha > 0\ \ \beta < 0 \\ \text{ii)}\ \Theta_1 < \Theta_2 < \Theta_3 & \alpha < 0\ \ \beta > 0 \end{array}\right\} \alpha\cdot\beta < 0$$

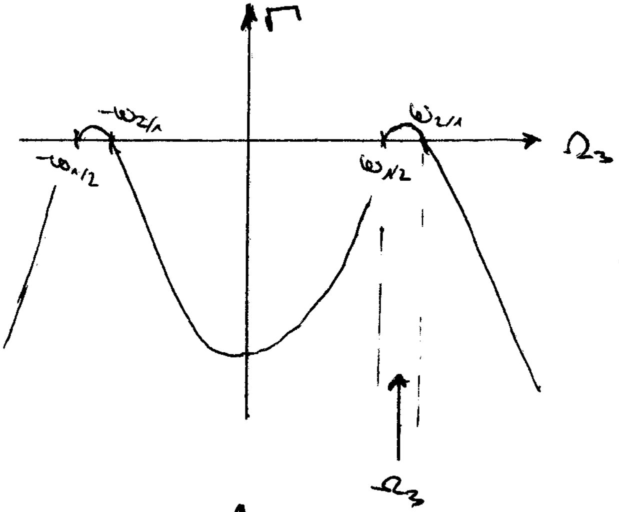
iii) $\Theta_1 < \Theta_3 < \Theta_2$ $\qquad$ $\alpha > 0 \quad \beta > 0 \Rightarrow \alpha\cdot\beta > 0$

zu i) $\quad |\omega_1| > |\Omega_3| \qquad |\omega_2| < |\Omega_3|$

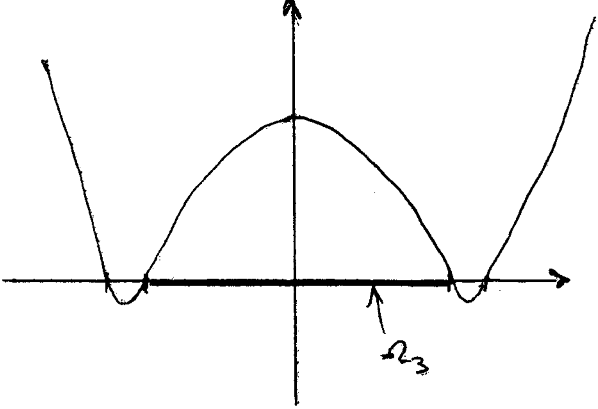
ii) $\quad |\omega_1| < |\Omega_3| \qquad |\omega_2| > |\Omega_3|$

iii) $\quad |\omega_1| > |\Omega_3| \qquad |\omega_2| > |\Omega_3|$

i) und ii) $\dot{\Omega}_3 = \sqrt{-d\beta}\sqrt{(\Omega_3^2 - \omega_1)(\omega_2^2 - \Omega_3)}$



stabile Drehung



instabile Drehung

Reversible und Irreversible Vorgänge

reversibel : Ping-Pong, Planeten, ...
Expansion - Kompression
Phasenübergänge

irreversibel : Wärmeleitung
Reibung ...

Entropie S

Entropie ⇔ Wärmelehre wie Ladung ⇔ Elektrizität

Entropie = "Wärmemenge, Wärmesubstanz"

$\Delta S > 0$ in jedem irreversiblen Vorgang

innere Energie : U

$$\boxed{dU = T\,ds - p\,dV}$$ 1. Hauptsatz der Thermodyn.

(eigtl. $+\mu\,dN$)

Ideales Gas

Zustandsgleichungen:

thermische .. $pV = N R T$

Masse (kmol) allg. Gaskonstante

$$R = 8314 \frac{Nm}{kmol \cdot K}$$

kalorische .. $U = N c_v T$

$$c_v = \begin{cases} \frac{3}{2} R & \text{für einatom.} \\ \frac{5}{2} R & \text{" zweiatom.} \\ \sim \frac{7}{2} R & \text{sonst} \end{cases}$$

Bsp.:

$$dU = m \cdot c_{H_2O} \cdot dT$$

$$m c_{H_2O} \, dT = T \cdot dS$$

$$\int_{0°C}^{24°C} dS = m c_{H_2O} \cdot \int_{0+T_0}^{24+T_0} \frac{dT}{T} = m c_{H_2O} \log \frac{297,15}{273.15}$$

für id. Gas

$$N c_v \, dT = T \, ds - \frac{NRT}{V} \, dV$$

$$N c_v \frac{dT}{T} = ds - NR \frac{dV}{V}$$

$$N c_v \log \frac{T}{T_0} = S - S_0 - NR \log \frac{V}{V_0}$$

$$S = S_0 + NR \log \frac{V}{V_0} + N c_v \log \frac{T}{T_0}$$

$$T = T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{R/c_v} e^{\frac{S - S_0}{N c_v}}$$

$$U = N c_v T = N c_v T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{R/c_v} e^{\frac{S - S_0}{N c_v}}$$

$$= U(S, V, N)$$

allgemein gilt:

Wenn U als Funktion von S, V, und N gegeben ist, dann nennt man $U = U(S, V, N)$ Fundamentalgleichung oder thermodyn. Potential

Wenn $U(S, V, N)$ bekannt ist, dann kann man daraus die Zustandsgleichungen ableiten

$$dU = \underbrace{\frac{\partial U}{\partial S}}_{T} \cdot dS + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial V}}_{-P} dV + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial N}}_{\mu = \text{chem. Pot.}} \cdot dN$$

im Labor : $U(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = \lambda U(S,V,N)$

Gibbs - Duhem : $U(S,V,N)$

$$= TS - pV + \mu N \Big|_{\lambda = 1}$$

extensive u. intensive Zustandsgrößen

Mengengr. Spannungsgr.

$U(S,V,N)$ sei gegeben und uns interessiert das Verhalten des System in der Umgebung von S_0, V_0, N_0

1) spezifische Größen :

$$u = \frac{U}{N} \quad s = \frac{S}{N} \quad v = \frac{V}{N} \rightsquigarrow u = u(s,v)$$

$$u(s - s_0, v - v_0) = u(s_0, v_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_v (s - s_0)$$
$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_s (v - v_0) + \frac{a}{2}(s - s_0)^2 + b(s - s_0)(v - v_0)$$
$$+ \frac{c}{2}(v - v_0)^2 + \dots$$

$$T = \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_v}_{T_0} + a\underbrace{(s-s_0)}_{ds} + b\underbrace{(v-v_0)}_{dv}$$

$$dT := T - T_0$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\begin{aligned} dT &= a\,ds + b\,dv \\ -dp &= b\,ds + c\,dv \\ du &= T\,ds - p\,dv \end{aligned}}$$

Spezifische Wärme bei konst. Volumen

$$c_v = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v$$

spezifische Wärme bei konst Druck

$$c_p = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p$$

isotherme Kompressibilität

$$\kappa_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$$

thermischer Ausdehnungskoeffizient

$$\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

Theo. 28.06.

allgemein

$$U = U(S, V, N)$$

$$T = \frac{\partial U}{\partial S}$$

$$p = \frac{\partial U}{V}$$

$$\mu = \frac{\partial U}{\partial N}$$

molare Größen:

$$u = \frac{U}{N} \quad v = \frac{V}{N}$$

$$s = \frac{S}{N}$$

$$\alpha = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} \qquad \kappa_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}$$

$$c_v = T \frac{\partial s}{\partial T} \qquad c_p = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)$$

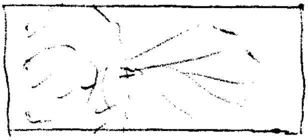
$$u = TS - pV + \mu N \qquad dU = TdS - pdV + \mu dN$$

ideales Gas

...

$$pV = NRT$$

$$U = Nc_vT$$



$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_u = ?$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_u = ?$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_u = ?$$

$$dT = a\,ds + b\,dv$$

$$-dp = b\,ds + c\,dv$$

$$du = T\,ds - p\,dv$$

1.) a, b, c durch α, κ_T, c_v (c_p) ausdrücken

2.) $\frac{\partial x}{\partial y}$ durch a, b, c ausdrücken

<u>α:</u> $dp = 0$

$$b\,dT = (b^2 - ac)\,dv$$

$$\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{b}{b^2-ac} \cdot \frac{1}{v}$$

<u>κ_T:</u> $dT = 0$

$$a\,dp = (b^2 - ac)\,dv$$

$$\kappa_T = - \frac{a}{v(b^2-ac)}$$

<u>c_v:</u> $dv = 0$

$$c_v = T/a$$

<u>c_p</u>: $dp = 0$

$$c\,dT = (ac - b^2)\,ds \qquad c_p = \cancel{4}\,\frac{c \cdot T}{ac - b^2}$$

$$a = \frac{T}{c_v}$$

$$\frac{\alpha}{k_T} = \frac{-b}{a} \Rightarrow b = \frac{-\alpha T}{k_T \, c_v}$$

$$\cancel{\frac{c_p}{\alpha}} \quad \frac{c_p}{k_T} = \frac{c T v}{a} \Rightarrow c = \frac{c_p \cancel{T}}{k_T \cancel{T} v \, c_v}$$

$$c = \frac{c_p}{v k_T c_v} = \frac{k}{v k_T} \qquad k := \frac{c_p}{c_v}$$

$$c_p - c_v = T\left(\frac{c}{ac - b^2} - \frac{1}{a}\right) = T \frac{\cancel{ac} - \cancel{ac} + b^2}{a\,(ac - b^2)}$$

$$= -T v \alpha \cdot \frac{b}{a} = T v \frac{\alpha^2}{k_T}$$

$$c_p - c_v = \frac{\alpha^2}{k_T} T v$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_u = \frac{p}{T}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_u = -(Tc + bp)\,dv$$

$$-c - \frac{bp}{T} = -\left(\frac{c_p}{v k_T c_v} - \frac{p}{\cancel{T}} \frac{\alpha \cancel{T}}{k_T \cdot c_v}\right) = -\frac{1}{k_T c_v}\left(\frac{c_p}{v} - p\alpha\right)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_u : \quad T\,dT = \left(bT + pa\right)\,dv$$

$$b + \frac{pa}{T} = -\frac{\alpha T}{\kappa_T c_v} + \frac{p}{c_v} = \frac{1}{c_v}\left(p - \frac{\alpha T}{\kappa_T}\right)$$

<u>ideales Gas</u>

$$\alpha = \frac{NR}{pV} = \frac{1}{T}$$

$$\kappa_T = + \frac{NRT}{Vp^2} = \frac{1}{p}$$

$$T\frac{ds}{dT} = \frac{T}{T}\,\frac{du}{dT} = \frac{Tc_v}{T} \quad \Rightarrow \quad c_v = c_v$$

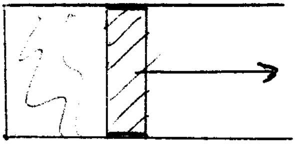
$$c_p = c_v + \frac{T \cdot v p}{T^2} = c_v + R$$

Luft: $c_v = \frac{5}{2} R$

$c_p = \frac{7}{2} R$

$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5}$

beim id. Gas ändert sich die Temp. nicht wenn sich das Volumen ändert



adiabatische Expansion

isentropisch : $s = 0$

$du = -p\,dv$ ideales Gas

$$c_v \frac{dT}{T} = -R \frac{dv}{v}$$

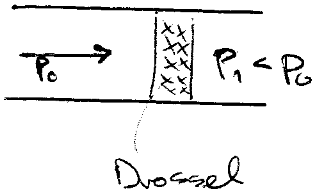
$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^{c_v} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{R} \Rightarrow T = T_0 \left(\frac{v_0}{v}\right)^{R/c_v}$$

$$\frac{pv}{p_0 v_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{R/c_v}$$

$$p = p_0 \left(\frac{v_0}{v}\right)^{R/c_v + 1} \quad ; \quad \frac{R}{c_v} + 1 = \frac{c_p - c_v}{c_v} + 1 = \frac{c_p}{c_v} = \kappa$$

$p v^{\kappa} = \text{const.}$, daher κ = "Adiabatenindex"

Joule-Thompson



Energiebilanz : $u_0 + p_0 v_0 = u_1 + p_1 v_1$

$\leadsto$ $h =$ "Enthalpie" $= u + pv = \text{const}$

$$dh = d = d(u + pv) = Tds - pdv + pdv + vdp$$

$$\boxed{dh = Tds + vdp}$$

$$\leadsto T = \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p \; ; \; v = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s$$

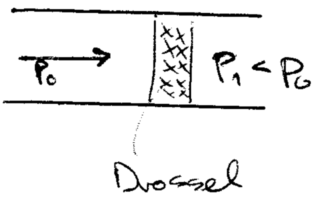
$\leadsto$ $h(s,p)$ $\Rightarrow$ ist ein Potential

$u \Rightarrow h$: Legendre-Transformation

$f = u - Ts$ Freie Energie

$$df = Tds - pdv - Tds - sdT$$
$$= -sdT - pdv \quad \leadsto f = f(T,v)$$

Joule-Thompson



Energiebilanz : $u_0 + p_0 v_0 = u_1 + p_1 v_1$

$\rightsquigarrow$ $h =$ „Enthalpie" $= u + pv = \text{const}$

$$dh = d = d(u + pv) = T\,ds - p\,dv + p\,dv + v\,dp$$

$$\boxed{dh = T\,ds + v\,dp}$$

$$\rightsquigarrow T = \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p \;;\; v = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s$$

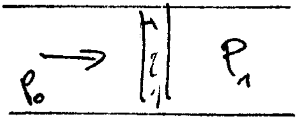
$\rightsquigarrow h(s,p) \Rightarrow$ ist ein Potential

$u \Rightarrow h$: Legendre-Transformation

$f = u - Ts$ Freie Energie

$$df = T\,ds - p\,dv - T\,ds - s\,dT$$
$$= -s\,dT - p\,dv \quad \rightsquigarrow f = f(T,v)$$

Joule-Thompson



$p_1 < p_0$

$$\underbrace{p_0 v_- + u_0}_{\text{Enthalpie } h} = u_1 + p_1 v_1$$

$$h_0 = h_1$$

$$dh = d(u + pv)$$
$$= T ds - p\cancel{dv} + \cancel{pdv} + v dp$$

$$dh = T ds - v dp \quad \text{vgl. } du = T ds - p dv$$

$$\rightsquigarrow h = h(s, p)$$
$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p ds + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s dp$$
$$\rightsquigarrow T = \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right) \qquad v = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s$$

Legendre-Transformation

$f := u - Ts$ freie Energie $df = \ldots$

↳ Zustandsgl.

$g := u - Ts + pv$ freie Enthalpie (Gibbs Potent.)

Gas charakterisiert α, c_p, c_v, k_T

$$c_{JT} := \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h$$

$$du = T\,ds - p\,dv$$

$$\left.\begin{aligned} dT &= a\,ds + b\,dv \\ -dp &= b\,ds + c\,dv \\ dh &= T\,ds + v\,dp \end{aligned}\right] \begin{aligned} &\cdot c \\ &\cdot(-b) \\ & \end{aligned}$$

$$a = \frac{T}{c_v} \qquad b = -\frac{T\alpha}{k_T c_v}$$

$$c = \frac{c_p}{v c_v k_T} \qquad c_p = c_v + \frac{T v \alpha^2}{k_T}$$

$$c\,dT + b\,dp = (ac - b^2)\,ds$$

$$dh = T\frac{c\,dT + b\,dp}{ac - b^2} + v\,dp \overset{!}{=} 0$$

$$c\,dT + b\,dp = -\frac{v\,dp}{T}(ac - b^2) - b\,dp$$

$$c_{JT} = \left(\frac{dT}{dp}\right)_h = -\frac{v}{T}(ac - b^2) - b = -\frac{v}{T}(a - b^2/c) - b/c$$

$$a \cdot \frac{b^2}{c} = \frac{T}{c_v} - \frac{T^2\alpha^2 v c_v k_T}{k_T^2 c_v^2 \cdot c_p}$$

$$-\frac{v}{T}\left(a - \frac{b^2}{c}\right) = -\frac{v}{c_v} + \frac{T\alpha^2 v^2}{k_T c_v c_p}$$

$$-\frac{b}{c} = \frac{T\alpha v \cancel{c_v}\cancel{k_T}}{\cancel{k_T}\cancel{c_v}\cdot c_p}$$

$\Rightarrow$

$$c_{jt} = \frac{T\alpha^2 v^2 - v c_p k_T + T\alpha c_v k_T v}{k_T c_v c_p}$$

setze ein: $c_p = c_v + \frac{Tv\alpha^2}{k_T}$

$$c_{jT} = \frac{v}{k_T c_v c_p}\left(\cancel{T\alpha^2 v} - k_T c_v - \cancel{Tv\alpha^2} + T\alpha c_v k_T\right)$$

$$\boxed{c_{jT} = \frac{v}{c_p}\left(T\alpha - 1\right)}$$

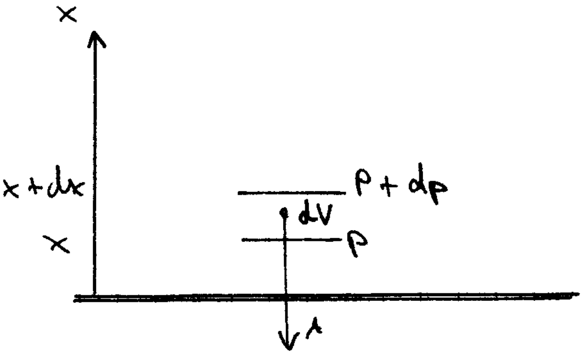
ideales Gas

$\alpha = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow c_{jT} = 0$

Wenn man ein id. Gas durch die Drossel schickt, sinkt die Temperatur nicht

Gase müssen ggf. vorgekühlt werden.

Die Athmosphäre



$$p = \rho\, dV g / A + p + dp$$

$$0 = \rho g \cdot dx + dp$$

$$\boxed{dp = -\rho \cdot g \cdot dx}$$ („hydrostatische Grundgl.")

I) Isotherme Athmosphäre

$$T = T_0 = \text{const.}$$

$$pV = RT \qquad R = 8314 \frac{\text{Joule}}{\text{kmol K}}$$

$$dp = -\rho g\, dx \qquad \tilde{\mu} = 29 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \qquad \mu = 29\,\text{kg}$$

$$\rho = \frac{\tilde{\mu} \cdot 1\,\text{kmol}}{v} = \frac{\mu}{v}$$

$$p = \frac{R}{\mu} \rho T \quad ; \rho = \rho(x)$$

$$dp = \frac{R}{\mu} T_0 \, d\varrho \qquad \rightsquigarrow$$

$$\frac{R}{\mu} T_0 \cdot d\varrho = -g\varrho \, dx$$

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = -\frac{\mu g}{RT_0} \cdot dx$$

$$\log \varrho = -\frac{\mu g}{RT_0} \cdot x + \text{const} \qquad \varrho_0 = \varrho(0) = \frac{\mu}{RT_0} \cdot p_0$$

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{\mu g}{RT_0} \cdot x}$$

Grenze für halben Luftdruck

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{2} \Rightarrow \log 2 = \frac{\mu g}{RT_0} \cdot x_{1/2}$$

$$x_{1/2} = \frac{RT_0}{\mu g} \cdot \log 2 \simeq 5800 \, m$$

II) Adiabatische Athmosphäre

$$p \cdot v^k = \text{const} \; ; \; k = \frac{c_p}{c_v} \qquad k_{Luft} = \frac{\frac{5}{2}R + R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5}$$

$$p \sim \varrho^k \quad \text{bzw} \quad p = p_0 \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^k$$

$$dp = p_0 k \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{\varrho_0} \, d\varrho$$

$$d\rho = -\rho g\, dx$$

$$\rho^{\kappa-2}\, d\rho = -g\rho_0^{\kappa} \cdot \frac{\cancel{\ast}1}{\kappa p_0}\, dx$$

$$\frac{1}{\kappa-1}\rho^{\kappa-1} = -g\rho_0^{\kappa}\frac{1}{\kappa p_0}x + \frac{\rho_0^{\kappa-1}}{\kappa-1}$$

$$\rho^{\kappa-1} = \rho_0^{\kappa-1}\left(1 - \frac{g(\kappa-1)}{\kappa p_0}\cdot \rho_0 \cdot x\right)$$

$$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{\mu g}{RT_0}\cdot\frac{\kappa-1}{\kappa}\cdot x\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

$$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{\mu g}{RT_0}\cdot\frac{2}{7}x\right)^{5/2}$$

$$T \sim \rho^{\kappa-1} \sim \left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa}\cdot\frac{g\mu}{RT_0}\cdot x\right)$$

$$T = T_0\left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa}\cdot\frac{g\mu}{RT_0}\cdot x\right)$$

Anstieg der Temperatur ist linear

Die ad. ~~Grenze~~ Athmosphäre hat eine Grenze

$$x_{grenze} = \frac{RT_0}{g\mu}\cdot\frac{\kappa}{\kappa-1}$$

$$x_{grenze}^{(adiab.)} = x_{1/2}^{(isotherm)}\cdot\frac{7}{2\log 2} \approx 30\text{ km}$$

5.7.04

Ideales Gas

$p\,v = RT \quad ; \quad \rho \sim \frac{1}{v}$

Wärmeleitung total

$$\left.\begin{aligned} &\text{isotherm}: T = \text{const} \Rightarrow p \sim \rho \\ &\text{adiabatisch}: \qquad\qquad \Rightarrow p \sim \rho^{\kappa} \end{aligned}\right| \; ; \; \kappa = \frac{c_p}{c_v} \left(\frac{7}{5}, \frac{5}{3} \right)$$

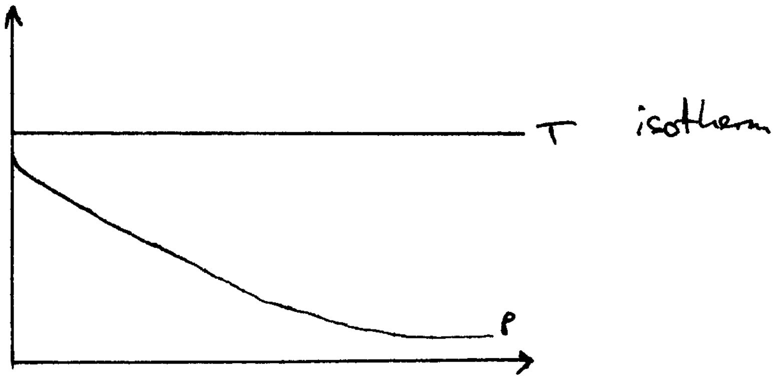
keine Wärmeleitung

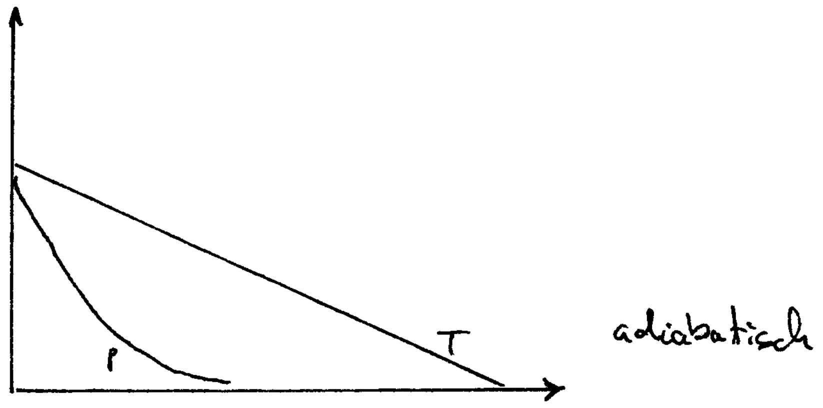
$$\left.\begin{aligned} &\text{isotherm}: T = \text{const} \\ &\text{adiabatisch}: \; \ldots \end{aligned}\right\} \text{polytrop}$$

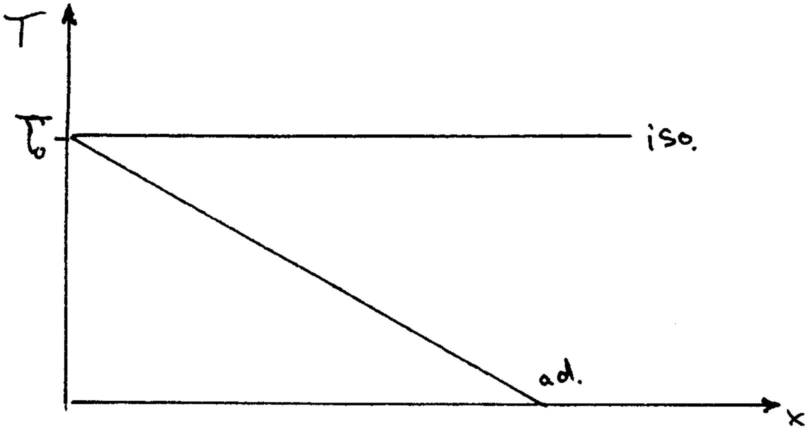
$$\left.\begin{aligned} &\rho = \rho_0 \, e^{-\frac{\mu g}{RT_0} x} \; , \; p = p_0 \cdot e^{-\frac{\mu g}{RT_0} x} \\ &\rho T \sim \rho^{\kappa} \Leftrightarrow T \sim \rho^{\kappa-1} \end{aligned}\right\} \text{isotherm}$$

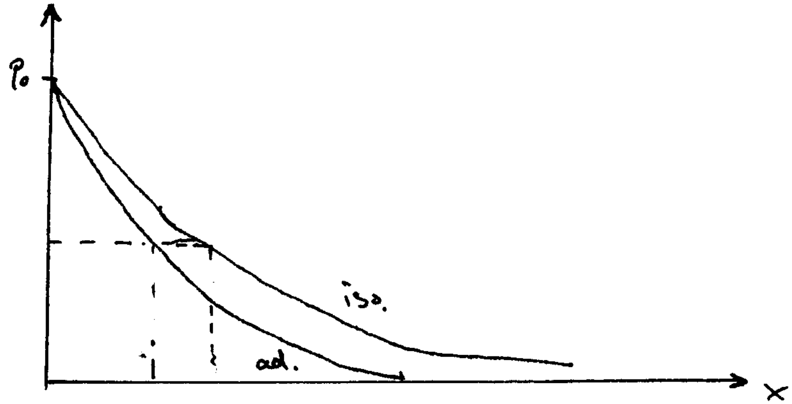
$$\left.\begin{aligned} &\rho = \rho_0 \left(1 - x \frac{\mu g}{RT_0} \frac{\kappa-1}{\kappa} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \longrightarrow \rho_0 \Big(1 - \frac{\cancel{\kappa}}{\kappa} \frac{\mu}{RT_0} \\ &p = p_0 \left(1 - x \frac{\mu g}{RT_0} \frac{\kappa-1}{\kappa} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \longrightarrow p_0 \Big(1 - x \frac{\mu g}{RT_0} \\ &T = T_0 \left(1 - x \frac{\mu g}{R} \frac{\kappa-1}{\kappa} \right) \end{aligned}\right\} \text{adiab.}$$

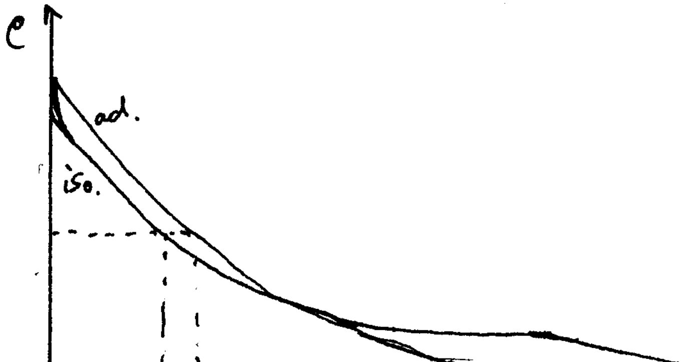
$\rho \xrightarrow{x \ll 1} \rho_0 \left(1 - \frac{\mu g}{RT_0} x\right)$ Taylor | isoth.






T
T₀
iso.
ad.
x


p₀
iso.
ad.
x


ρ
ad.
iso.
x

Van der Waals - Gas

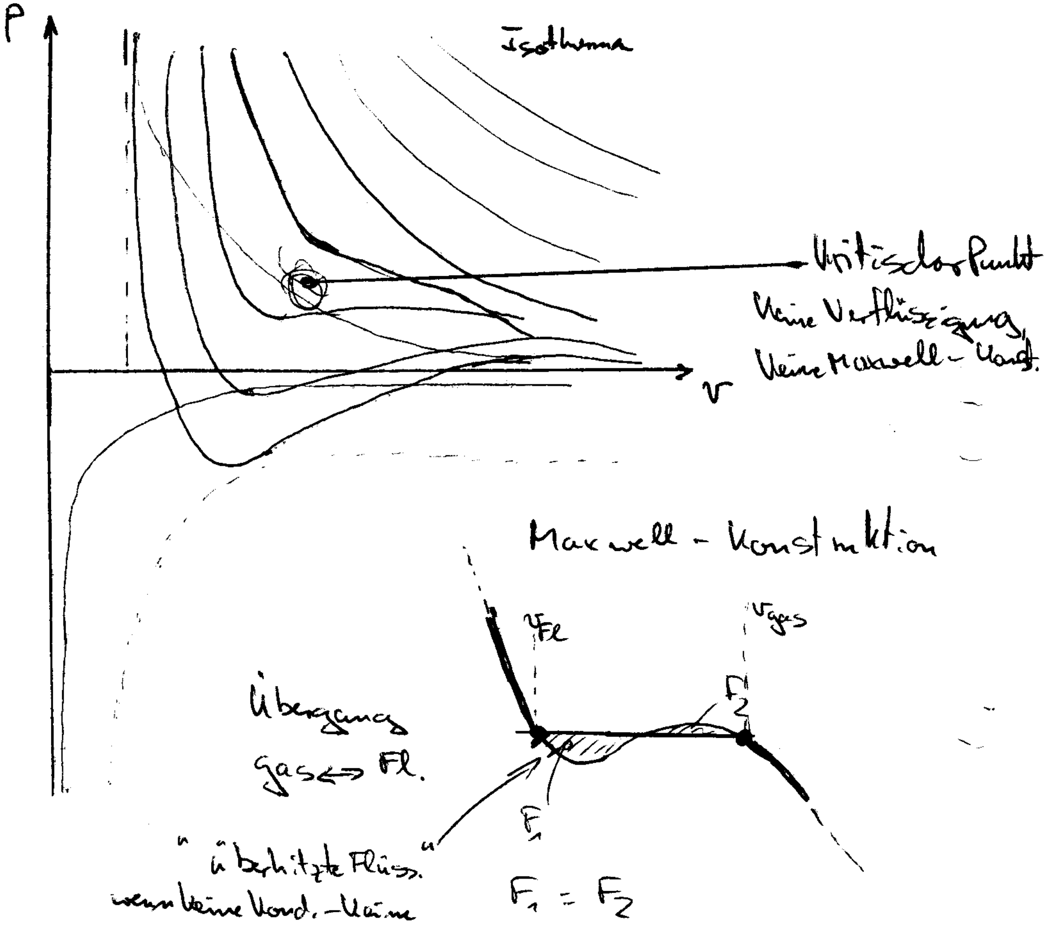
$$\boxed{\left(p + \frac{a}{v^2}\right)\left(v - b\right) = RT}$$ heur.

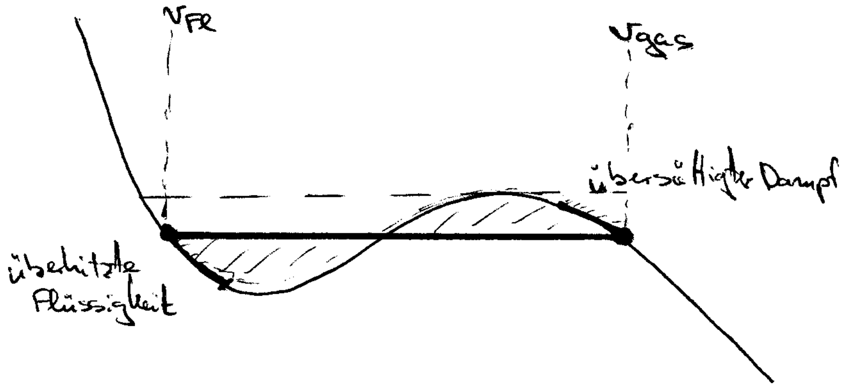
b: Eigenvolumen

$\frac{a}{v^2}$: Kohäsionskräfte

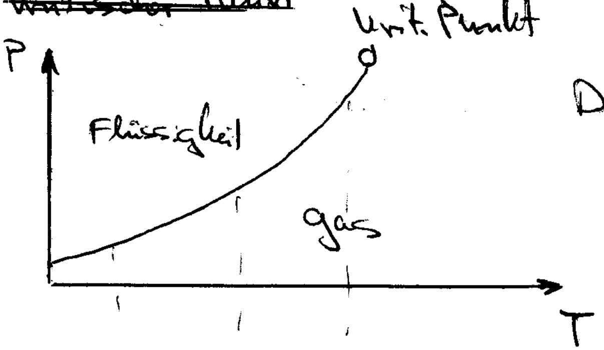
$u = c_v T - \frac{a}{v}$

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$





~~Kritischer Punkt~~



Dampfdruck - Kurve

Kritischer Punkt

T_{kr} , P_{kr} , V_{kr}

Die Isotherme am krit. Punkt hat eine hor. Tangente

1./2. Ableit. = 0

$$0 \overset{!}{=} p' = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3} \leadsto \frac{RT}{(v-b)^2} = \frac{2a}{v^2}$$

$$0 \overset{!}{=} p'' = \frac{2RT}{(v-b)^3} - \frac{6a}{v^4} \leadsto \frac{2RT}{(v-b)^3} = \frac{6a}{v^4}$$

$$\Rightarrow \frac{v-b}{2} = \frac{v}{3}$$

$$\Rightarrow 3v - 3b = 2v$$

$$v_{kr} = 3b$$

$$R\,T_{kr} = \frac{2a}{(3b)^3}\,4b^2 = \frac{8a}{27b}$$

$$p_{kr} = \frac{8a}{27b-2b} - \frac{a}{9b^2} = \frac{a}{27\;b^2}$$

$$\tau := \frac{T}{T_{kr}} \qquad \pi := \frac{p}{p_{kr}} \qquad \varphi := \frac{v}{v_{kr}}$$

$\longrightarrow$ reduzierte van-der-Waals-Gleichung

$$\left(\pi + \frac{3}{\varphi^2}\right)\left(3\varphi - 1\right) = 8\tau$$

Ex 6.7.04

Sterling - Motor

→ Carnot'sche Kreisprozess

1. Hauptsatz der Thermodynamik

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$$

U innere Energie

Q Wärmemenge

W mechanische Arbeit

$$p \cdot V = \frac{1}{2} f N k T$$

$p = F/A$ $\quad$ $p \cdot v =$ Kraft × Weg

ΔU wenn $V = \text{const}$?

$U = \frac{1}{2} f N k T$ innere Energie ideales Gas

$\Delta U = \delta Q$; $\delta Q = \text{const.} \cdot \Delta T$

$\Delta U = \frac{1}{2} f N k \Delta T$ ~~spez~~fi

$\text{const} = \frac{1}{2} f N k$ ~~Spez~~. Wärme eines idealen Gases

$= \frac{1}{2} f \nu N_A k$; $N_A k = R$ allg. Gaskonstante

ν Anzahl der Mole

* $c_v = \frac{1}{2} f \nu R$ Spez. Wärmekapazität

$C_v = \frac{1}{2} f R = \frac{1}{2} f N_A k$ molare Wärmekapazität

Änderung der inneren Energie bei konstantem Druck

$$\Delta U = \delta Q + \delta W$$

$$\delta W = -p \cdot \Delta V$$

$$\Delta U = \delta Q - p \cdot \Delta V \Leftrightarrow \Delta U + p \Delta V = \delta Q$$

$p \cdot V = N_A k_B T$ für ein Mol ↓

$$\Delta U + p \Delta V = \delta Q$$

$$\Delta U + N_A k_B \Delta T = \delta Q$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} f N_A k_B \Delta T}_{\Delta U} + N_A k_B \Delta T = \delta Q$$

$$\delta Q = \underbrace{\left(\frac{1}{2} f + 1\right) N_A k_B}_{C_p} \Delta T$$

$$C_p = \frac{f+2}{2} N_A k_B = \frac{f+2}{2} R$$

$$C_p = C_v + R$$

$$\frac{C_p}{C_v} = \frac{f+2}{f} =: \kappa \quad \text{(Kappa, Adiabatenindex)}$$

Zustandsänderung $\qquad p \cdot V = \nu R T$

$p = \text{const}$	isobar
$V = \text{const}$	isochor
$T = \text{const}$	isotherm
$\delta Q = 0$	adiabatische Zustandsänderung

a) isobare Zustandsänderung für ein Mol:

$$\delta Q = dU + p\,dV = C_p \cdot dT$$

$H := U + pV$ $\quad$ Enthalpie

$$dH = dU + V \cdot dp + p\,dV$$

$$\rightsquigarrow \left.\frac{dH}{dT}\right|_{p=\text{const}} = C_p$$

b) in isochoren Prozessen gilt

$$\frac{dU}{dT}\Big|_{V=const} = C_V$$

c) isotherme Prozesse

$dU = 0$ bei idealen Gasen, da

$U = \frac{1}{2} f N k T$, U nur abhängig von T

$$\delta Q = -\delta W$$

d) adiabatische Prozess :

$\delta Q = 0 \rightarrow dU = -p\,dV$

$$\frac{dU}{dT} = C_V$$

$$dU = C_V\, dT$$

$$C_V\, dT = -\frac{RT}{V}\, dV$$

$$C_V\, \frac{dT}{T} = -R\, \frac{dV}{V}$$

$$\int_{T_0}^{T} c_v \frac{dT'}{T'} = -R \int_{V_0}^{V} \frac{dV'}{V'}$$

$$c_v \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) = -R \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

$$\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)^{c_v} = -\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)^{R}$$

$$\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)^{c_v} + \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)^{R} = 0$$

$$\ln\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{c_v} \cdot \left(\frac{V}{V_0}\right)^{R}\right] = 0$$

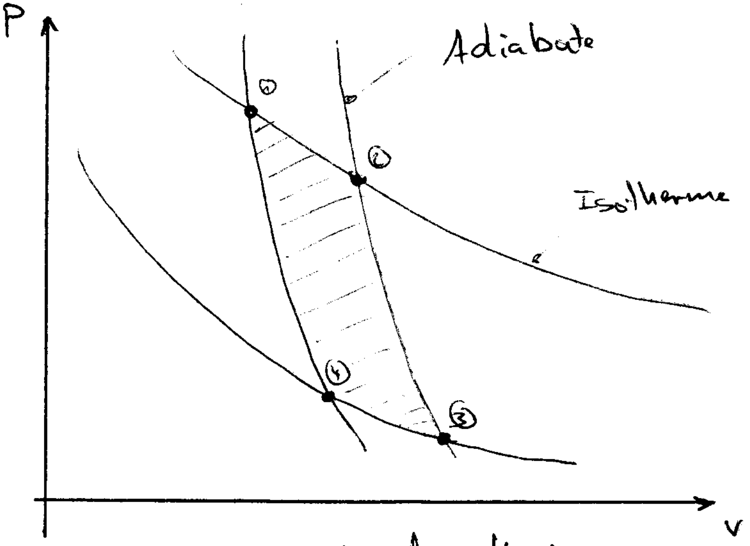
$$T^{c_v} \cdot V^{R} = \text{const.} = T_0^{c_v} \cdot V_0^{c_v}$$

$$\left[T \cdot V^{\frac{c_p - c_v}{c_v}}\right]^{c_v} = \text{const}$$

$$T \cdot V^{\frac{c_p - c_v}{c_v}} = \tilde{c} = T \cdot V^{\kappa - 1} \quad ; \; \kappa = \frac{c_p}{c_v} \geq 1$$

...

$$p \cdot V^{\kappa} = \tilde{\tilde{c}}$$



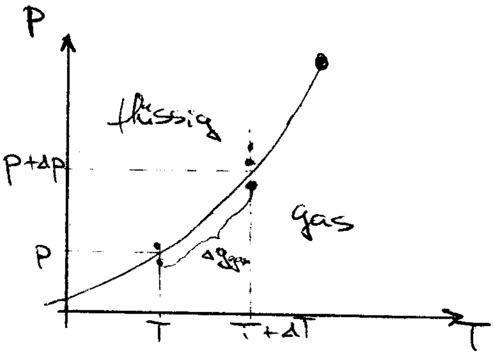
carnot'scher Kreisprozess

① → ② isotherme Exp.

② → ③ adib. Exp

$$\eta = \text{Wirkungsgrad} = \frac{\text{mech. Energie}}{\text{Wärmemenge}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \leq 1$$

Clausius – Clapeyron



Verdampfungswärme pro kmol : Q

1kg Wasser

4200 J/K für Erwärmung

1kg Wasse verdampfen

100° fl → 100° Dampf

225000 J/kg

$$\boxed{du = T\,ds - p\,dv}$$ 1. HptStz

$T_{fl} = T_{gas}$

$P_{fl} = P_{gas}$

$v_{fl} << v_{gas}$

$s_{fl} << s_{gas}$

$$dg = -s\,dT + v\,dp \,.$$

$\Rightarrow$ $g_{fe} = g_{gas}$ chem. Potential

$$\Delta g_{gas} = -s_{gas}\,\Delta T + v_{gas}\,\Delta p$$

$$\Delta g_{fe} = -s_{fe}\,\Delta T + v_{fe}\,\Delta p$$

$$\Delta g_{gas} = \Delta g_{fe}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{-s_{fe} + s_{gas}}{-v_{fe} + v_{gas}} = \frac{Q}{T \cdot \Delta v} \,.$$

$Q = v_{gas} \cdot T \cdot p'(T)$ Gleichung für Clausius-Cl.

Beziehung zw. Steigung der Dampfdruckkurve und Verdampfungsenergie

Wasser !

$p_0 = 10^5 \frac{N}{m^2}$

$$\left.\frac{dp}{dT}\right|_{100°C} \simeq 3700 \frac{N}{m^2 K}$$

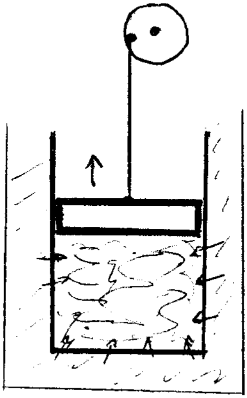
$$v_{gas} \approx \frac{RT}{p_0} = \frac{8314 \cdot 373}{10^5} \frac{J\,K\,m^2}{kmol\,K\,N} \simeq 31 \frac{m^3}{kmol}$$

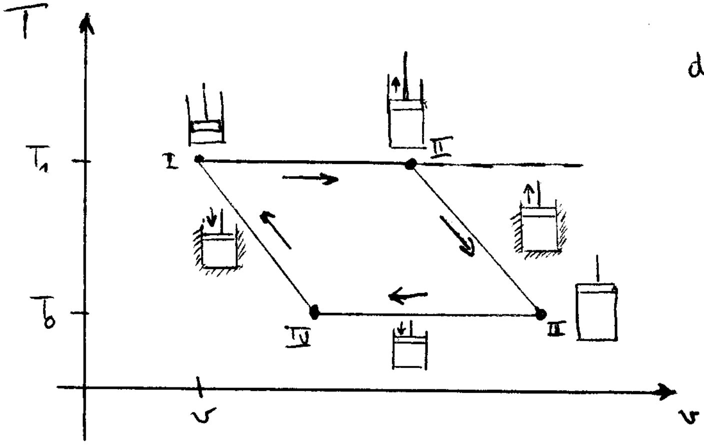
* für 18 kg, H_2O als ideales Gas

$$Q = 3700 \cdot 31 \cdot 373 \quad \frac{Nm}{kmol}$$

$$\tilde{Q} = \frac{Q}{18} \approx 2,25 \cdot 10^6 \frac{J}{kg}$$

Wärme-Kraft-Maschine / Wärme-Pumpe





$ds_{23} = ds_{41} = 0$

Wärmeaufnahme auf I - II : $Q = T_1 \Delta s_{12}$

$A = \oint p \, dv \qquad \eta = \frac{A}{Q}$ Wirkungsgrad der Kraftmasch.

$= \oint T ds - \oint du = - \oint du + T_1 \Delta s_{12} + T_0 \Delta s_{34}$

$$\oint du = U_{ende} - U_{anfang} = 0$$

$$\oint ds = 0 = \Delta s_{12} + 0 + \Delta S_{34} + 0$$

$$\Rightarrow \Delta s_{34} = -\Delta s_{12}$$, da Kreisprozess

$$\frac{1}{\eta_{WKM}} = \frac{T_1 \, \Delta s_{12}}{\Delta s_{12} (T_1 - T_0)} = \frac{T_1}{T_1 - T_0}$$

$$\eta_{WKM} = 1 - \frac{T_0}{T_1}$$

Beim Kühlschrank:

rückwärtslaufen

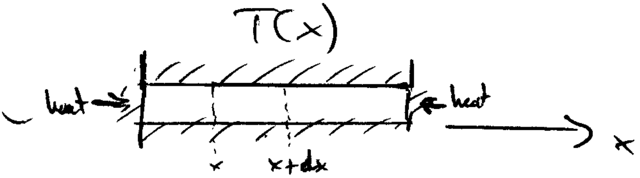
$$\eta_{Kühl} = \frac{T_0 \, \Delta s_{34}}{A} = \frac{T_0}{T_1 - T_0}$$

Wärmepumpe:

$$\eta_{WP} = \frac{T_1}{T_1 - T_0}$$

$$T_{max} \approx 3000 \, K$$

Theo.



const. spec. heat (just c for solid)

$u = c \cdot T$; c = const.

$j_u = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ λ = const. energy current

$(u(t+dt) - u(t))\,dx$ = total energy increase

$= (j_u(x) - j_u(x+dx))\,dt$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial j_u}{\partial x}$$

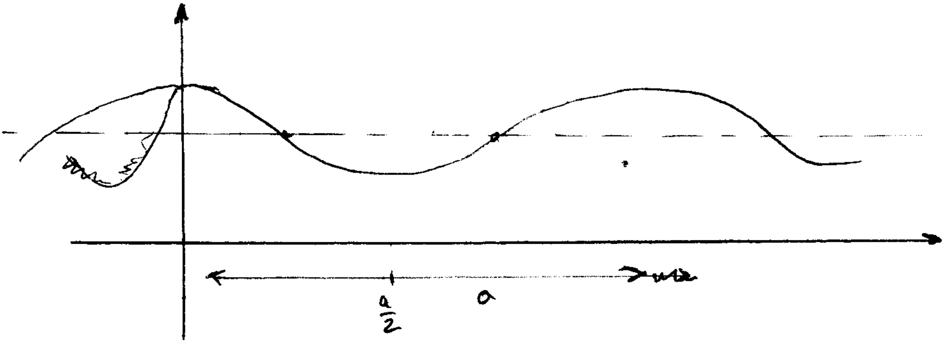
$$\boxed{c\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$ equ. of heat conduction

guessed solution:

$$T(x,t) = T_0 \sqrt{t+\tau}\; e^{-\frac{c}{4\lambda}\frac{x^2}{t+\tau}}$$

alternative ansatz:

$$\rightsquigarrow T_a(x,t) = \cos\frac{2\pi x}{a}\, e^{-\frac{\lambda}{c}\frac{4\pi^2}{a^2}t} \quad + \text{const.}$$



Fourier - Integral

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k)\, e^{ikx - \frac{\lambda}{c} k^2 t}\, dk$$

bei endlichem Bereich : => Fourier - Reihen

$$T(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[A_k \sin \frac{2\pi k}{a} x + B_k \cos \frac{2\pi k}{a} x \right] e^{-\frac{\lambda}{c} \cdot \frac{4\pi^2}{a^2} k^2 t}$$

=> A_k, B_k bestimmen !