Fourierentwicklung

- Ansatz: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{a} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{a} x\right) \right]$

  für ein $f(x)$ mit der Periode a

- Berechnung der Koeffizienten
  Skalarmultiplikation mit den Basisvektoren $\cos\left(\frac{2\pi n}{a} x\right)$ und $\sin\left(\frac{2\pi k}{a} x\right)$, diese stehen senkrecht aufeinander, da $\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx \equiv 0$

b_k: $\int_0^a f(x) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{a} x\right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\cancel{a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{a} x\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{a} x\right)} \right.$

$\left. + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{a} x\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{a} x\right) \right]$ nur für $n = k \neq 0$!

$\Leftrightarrow b_k = \frac{2}{a} \cdot \int_0^a f(x) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{a} x\right) dx$

a_k: $\int_0^a f(x) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{a} x\right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{a} x\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{a} x\right) \right.$

$\left. \cancel{+ b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{a} x\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{a} x\right)} \right]$ nur für $n = k$

1. Fall für $k = n = 0 \rightarrow a_0$

   $a_0 = \frac{1}{a} \cdot \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{2\pi k}{a} x\right) dx$

2. Fall für $k = n \neq 0$

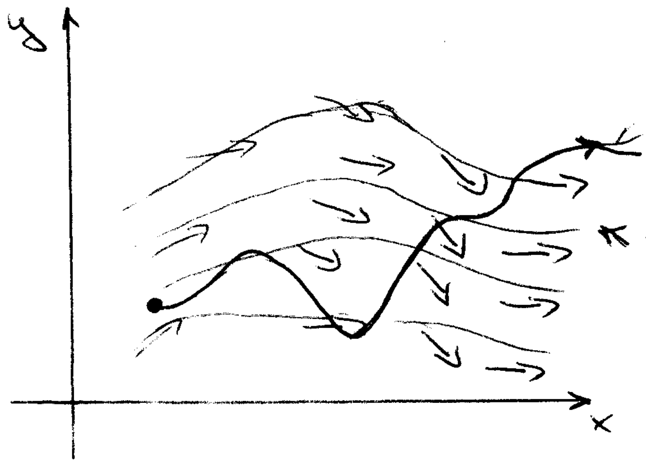
   $a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{2\pi k}{a} x\right) dx$

Theo 18.10.04

Feldbegriff

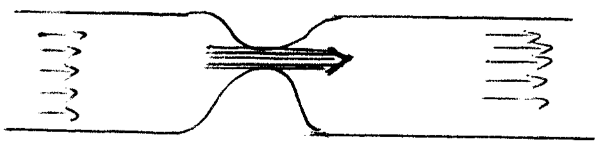
Bsp.: $T(\vec{r}, t)$

Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r}, t)$



Strombahn, konkrete Bahn eines Tröpfens im variablen Feld, wenn stationär = Stromlinie

Stromlinien, abhängig von t



Stationäre Strömung. Geschwindigkeitsfeld hängt nicht von t ab, aber offensichtlich gibt es dennoch Beschleunigung
→ Kraftfeld kann aus der Beschl. errechnet werden

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} = \vec{f}(\vec{r}, t)$$

"Vektorgradient"

↑ "substantielle", "totale" Ableitung

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{dt \to 0} \frac{\vec{v}_{\text{nachher}} - \vec{v}_{\text{vorher}}}{dt}$$

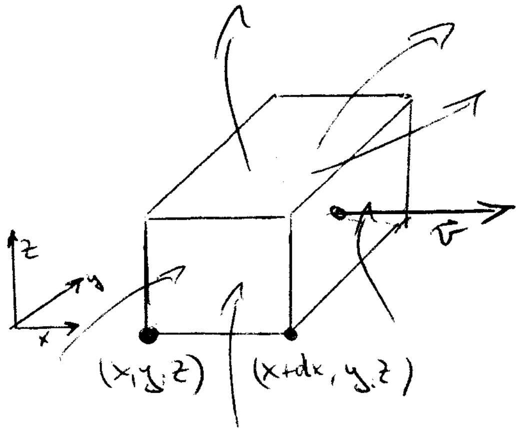
$$= \lim_{dt \to 0} \frac{\vec{v}(\vec{r} + \vec{v}\,dt, t + dt) - \vec{v}(\vec{r}, t)}{dt}$$

$$= \vec{v}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x\, dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y\, dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z\, dt - \vec{v}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v}{\partial x_j} v_j + \frac{\partial v}{\partial t} =: (\vec{v} \cdot \text{grad})\, \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

$$\varrho\left[(\vec{v}\cdot\operatorname{grad})\vec{v}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right]=\vec{f}(\vec{r},t) \Rightarrow \text{Eulergleichung}$$

Quellstärke berechnen



Quellen? Senken? → Vgl. rein und raus

$$\Big[-v_x(x,y+\eta,z+\varsigma)\cdot dy\,dz \quad \text{rein}$$
$$+\,v_x(x+dx,y+\eta,z+\varsigma)\,dy\,dz\Big] \quad \text{raus}$$
$$/\,dx\,dy\,dz \quad \text{pro Volumen}$$

Analog für andere Flächen ... $+(x\leftrightarrow y)+(x\leftrightarrow z)$

$$=\frac{v_x(x+dx,\ldots)-v_x(x,\ldots)}{dx}+(\;)+(\;)$$

$$\xrightarrow{dx,dy,dz\to 0}\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=:\operatorname{div}\vec{v}(\vec{r},t) \quad \Big|\ \text{Divergenz}$$

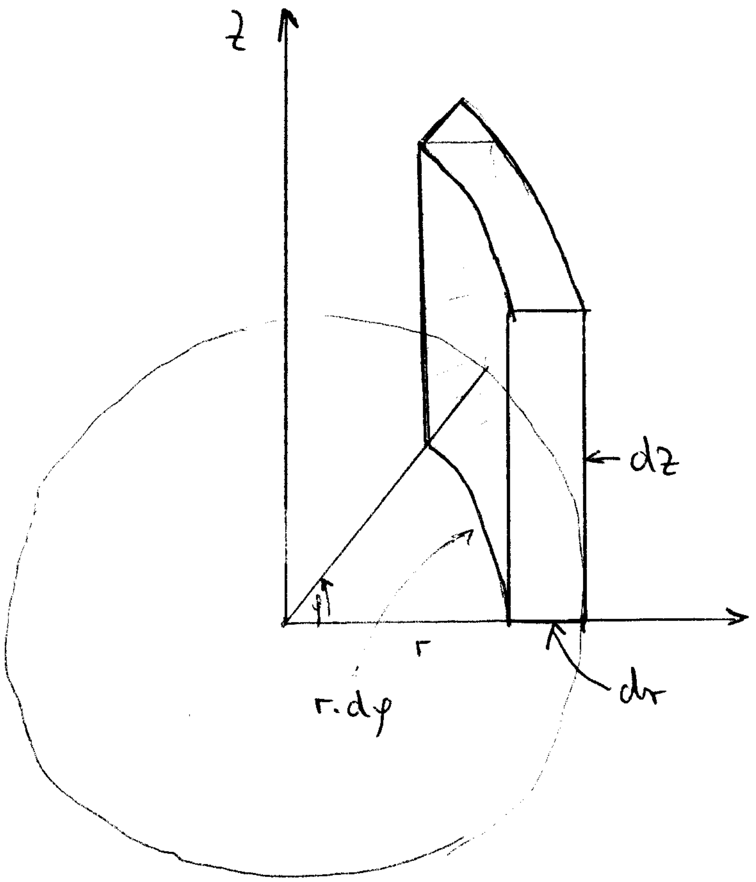
Bsp.: $\vec{v}=\left(x\cdot\sin y,\ \frac{x+y^2}{z},\ e^{x+y-z}\right)$

$$\operatorname{div}\vec{v}=\sin y+\frac{2y}{z}-e^{x+y-z}$$

Theo 18.10.04

Betrachtung in alternativen Koordinaten

Zylinderkoordinaten:



$$\operatorname{div} \vec{v}(r,\varphi,z) = ?$$

$$\operatorname{div} \vec{v}(r,\varphi,z) = \frac{v_r(r+dr,\varphi+\ldots,z+\ldots)(r+dr)\,d\varphi\,dz - v_r(r+dr,\varphi+\ldots,z+\ldots)\ldots}{r\cdot d\varphi\,dr\,dz} - \ldots \frac{r\,d\varphi\,dz}{\ldots}$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{v_r(r+dr,\ldots)(r+dr) - v_r(r,\ldots)r}{dr}\right] \longrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r)$$

analog für andere Seiten

$$\frac{v_\varphi(r+\ldots,\varphi+d\varphi,z+\ldots)\,dz\,dr - v_\varphi(r+\ldots,\varphi,z+\ldots)\,dz\,dr}{r\cdot dr\,d\varphi\,dz} \longrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}$$

Bsp.: Teetasse beim Umrühren

$$\operatorname{div} \vec{v}(r,\varphi,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\vec{v} = f(r)\,\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$\vec{j} = \varrho \cdot \vec{v}$ Massenstrom

Strom j, Dichte ϱ übertragbar auf beliebige Sachverhalte

→ Wenn Erhaltungssatz: $\boxed{\operatorname{div} \vec{j} + \dot{\varrho} = 0}$

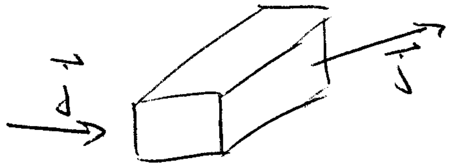
z.B. bei Ladung: Wenn Ladung aus dem Kondensator strömt, nimmt die Ladungsdichte im Kondensator entsprechend ab

"Kontinuitätsgleichung": Erhaltungssatz für Ströme; gilt, wenn Erhaltungssatz für entspr. Größe gilt

Aussicht: $\oint [\operatorname{div} j + \dot{\varrho}] = \ldots$? ⇒ Gauß'sche Satz

Theo 22.10.04

Gauß'sche Integralsatz

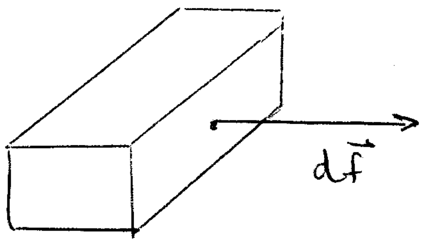


Divergenz = Quelldichte = $\dfrac{\text{Netto-Ergiebigkeit}}{\text{Volumen}}$

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}) = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \quad \text{in kart. Koordinaten}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r j_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} j_\varphi + \frac{\partial j_z}{\partial z} \quad \text{in zyl. Koord.}$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{\oint \vec{j}\, d\vec{f}}{\Delta V}$$



i) $d\vec{f} \perp$ auf der Fläche
ii) $|d\vec{f}|$ = Flächeninhalt
iii) $d\vec{f}$ zeigt nach außen

} Normalenvektor

$\Rightarrow$ $\vec{j} \cdot d\vec{f}$ = Komponente von $\vec{j}$, die durch die Fläche nach außen strömt

$\oint$ = Integral über die Oberfläche

$$\sum_i \left(\operatorname{div} \vec{j}_i \cdot \Delta V_i = \oint_{\Delta V_i} \vec{j} \cdot d\vec{f} \right)$$

nur äußere Oberflächen bleiben übrig!

$$\boxed{\int_V \operatorname{div} \vec{j}\, dV = \oint_V \vec{j} \cdot d\vec{f}}$$

<u>Beispiel</u> (in Zylinderkoordinaten)

$\vec{j} = (r^2 z, 0, z^2 r) = r^2 z \cdot \vec{e}_r + 0 \cdot e_\varphi + z^2 r \vec{e}_z$

$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial} (r^3 z) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 r) = 3rz + 2rz = 5rz$

Beide Seiten des Gaußschen auswerten

a) Volumenintegral

$5 \cdot 2\pi \int_0^1 dz \int_0^1 r\,dr\; rz = \frac{10\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{3}$ Gesamtergiebigkeit

b) Oberflächenintegral

Boden $(z=0) \rightarrow j=0$

$2\pi \int_0^1 r\,dr\; \vec{j} \cdot (0,0,1) + \ldots$ (Mantel)

$2\pi \int_0^1 r\,dr \cdot (1^2) \cdot r \quad + 2\pi \int_0^1 z\,dz = 2\pi\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5\pi}{3}$

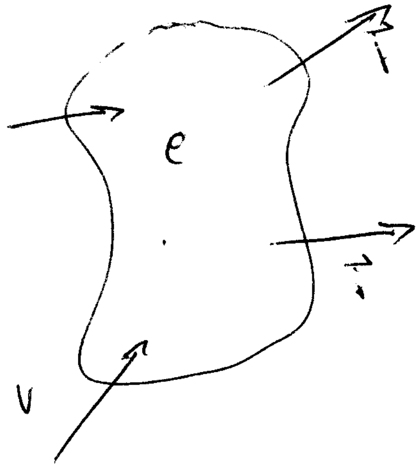
Mantel.

$\int_0^1 \underbrace{(z, 0, z^2)}_{\substack{r=1 \\ \text{auf Mantel}}} \cdot (2\pi\,dz, 0, 0)$

---

dV bei Kugel: $r^2\,dr \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$

Kontinuitätsgleichung in differentieller Form



$$\frac{d}{dt}Q = \frac{d}{dt}\int_V \varrho\, dV = -\oint_V \vec{j}\, d\vec{f} \;{}^{1)}$$

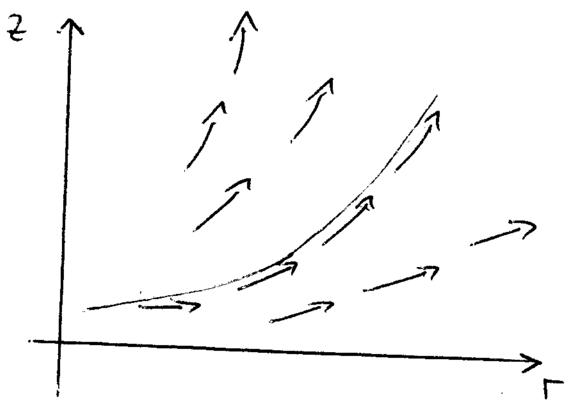
$$\int_V \frac{d\varrho}{dt}\, dV + \int_V \operatorname{div}\vec{j}\cdot dV = 0 \qquad \text{| Nach G. Int.}$$

$$\int_V dV\,(\dot{\varrho} + \operatorname{div}\vec{j}) = 0$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\dot{\varrho} + \operatorname{div}\vec{j} = 0}$$

1) Minus wg. Zustrom

Stromlinien



Vektorfeld + Stromlinie

Wie berechnet man die Stromlinien?

$$j = (r^2 z,\ 0,\ z^2 r)$$

$$z'(r) = \frac{dz}{dr} = \frac{v_z}{v_r} = \frac{z^2 r}{r^2 z} = \frac{z}{r}$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dr}{r} \implies \log z = \log r + \text{const.}$$

$$z = c \cdot r$$

$\longrightarrow$ Gedankenbahnen (Übung)

Rotation

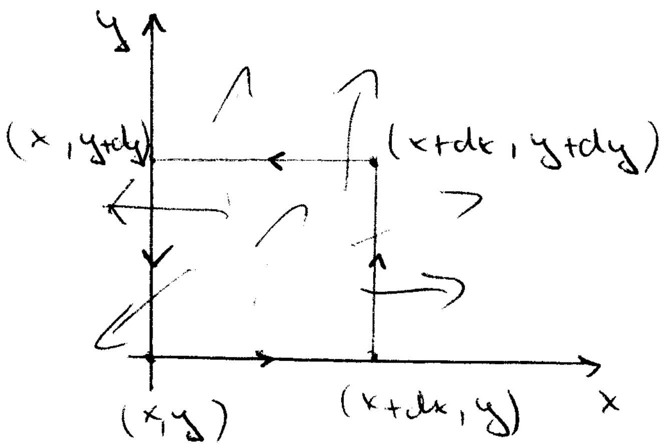
$\frac{d}{dx} \longrightarrow \begin{cases} \text{div} \\ \text{rot} \\ \text{grad} \end{cases}$ 3 Ableitungsbegriffe bei Vektorfunktionen

div : vektor → skalar
rot : vektor → vektor
grad : skalar → vektor
Vektorgradient : vektor → Vektor

Bezeichnung Rotation
$\text{rot}\,\vec{j}$ Deutsch
$\text{curl}\,\vec{j}$ Englisch

Rotation = "Wirbeldichte"

Achse wird vorgegeben. wieviel wirbelt das Feld um diese Achse?



Wirbeldichte um die z-Achse

$$(\text{rot}\; j)_z \xleftarrow{A\to 0} \left(\oint_A \vec{j}\cdot d\vec{s}\right)\cdot \frac{1}{A}$$

$$(\text{rot}\,\vec{j})_z = \Big\{ (dx,0,0)\,\vec{j}(x+\xi, y) + (-dx,0,0)\, j(x+\xi, y+dy) + (0,dy,0)\,\vec{j}(x+dx, y+\eta) + (0,-dy,0)\, j(x, y+\eta) \Big\}\cdot \frac{1}{dx\,dy}$$

$$= -\frac{j_x(\ldots, y+dy) - j_x(\ldots, y, \ldots)}{dy}$$

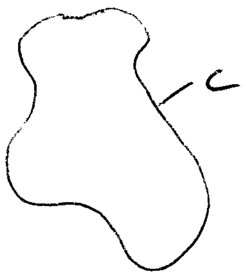
$$+ \frac{j_y(x+dx, \ldots) - j_y(x, \ldots)}{dx}$$

$$= \frac{\partial j_y}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial y}$$

$\Rightarrow$ z-Komponente berechnet, andere durch zyklisches Vertauschen

$$\text{rot}\,\vec{j} = \left\{ \frac{\partial j_z}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial z},\ \frac{\partial j_x}{\partial z} - \frac{\partial j_z}{\partial x},\ \frac{\partial j_y}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial y} \right\}$$

<u>Kleiner Bruder von Gauß: Stokescher Satz</u>



$$\boxed{\oint_C \vec{j} \cdot \vec{ds} = \int_A \text{rot}\,\vec{j} \cdot \vec{df}}\ ; \quad d\vec{f} = \text{Flächennormale}$$

$$\sum_i (\text{rot}\,\vec{j})_z \cdot A_i = \sum_i \oint_{A_i} \vec{j} \cdot \vec{ds}$$

$$\int_A (\text{rot}\,\vec{j})_z \cdot df_z = \oint \vec{j}_z \cdot \vec{ds} \quad \ldots ? \quad \longrightarrow \quad \ldots$$

Theo 25.10.04

Wdh. Rotation

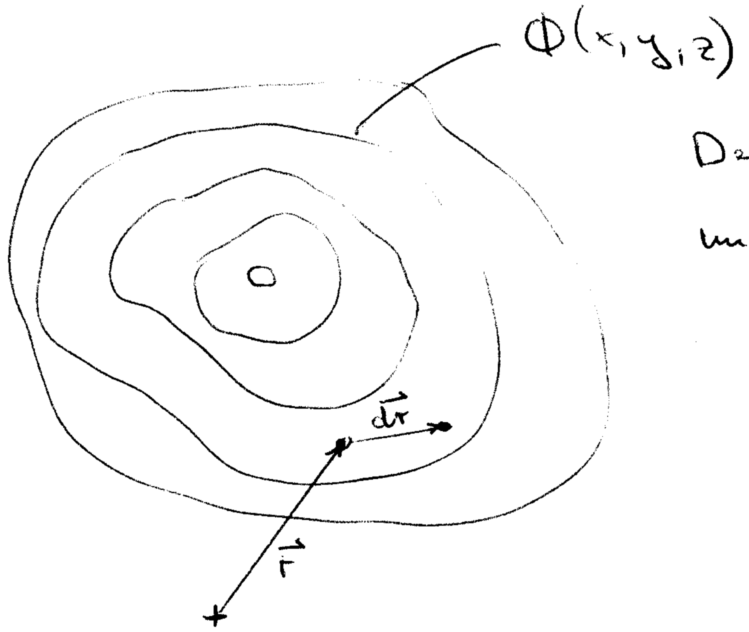
$$(\mathrm{rot}\,\vec{j})_z = \frac{1}{dx\,dy} \oint \vec{j}\cdot d\vec{s} \qquad ;\ d\vec{f} = dx\,dy\,\vec{e}_z$$

$$\sum (\mathrm{rot}\,\vec{j})\,d\vec{f} = \sum \oint \vec{j}\,d\vec{s}$$

$$\int_A \mathrm{rot}\,\vec{j}\cdot d\vec{f} = \oint_{C_A} \vec{j}\,d\vec{s} \qquad \text{Stokescher Satz}$$

$\Rightarrow$ Rotation über eine geschlossene Fläche ist Null

Gradient



Der Gradient gibt Richtung und Stärke des Anstiegs an.

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz)$$

$$d\Phi(x,y,z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}\,dz$$

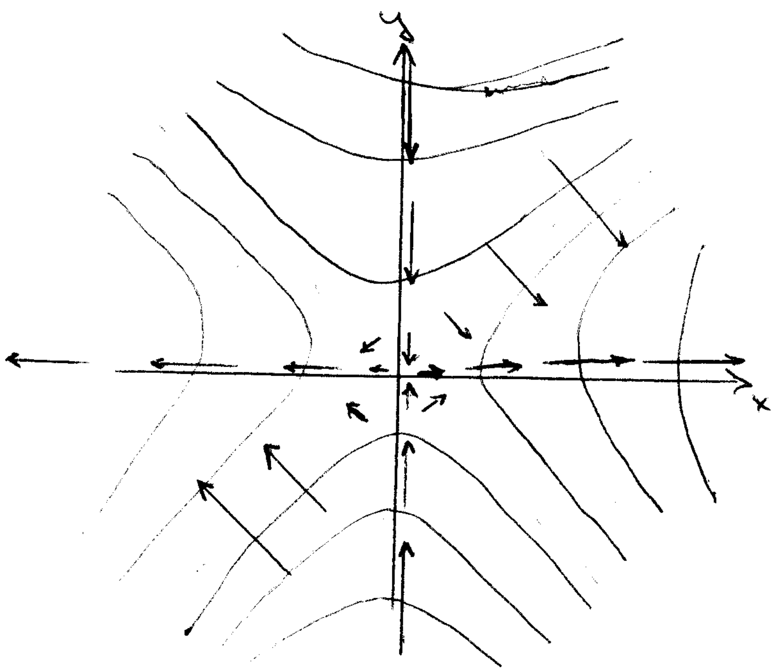
$$= \underbrace{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)}_{\mathrm{grad}(\phi)} \cdot d\vec{r}$$

$$d\phi = \mathrm{grad}\,\phi \cdot d\vec{r}$$

Theo 25.10.04

Beispiel: $\phi = x^2 - y^2 \quad \text{grad} = 2(x, -y)$

Höhenlinien (Äquipotentiallinien)



Gradientenlinien stehen senkrecht auf den Höhenlinien

Gradienten: "Feldlinien"

Kraftfeld: $\vec{F} = -\text{grad}\, \phi$

Feldlinien als $y = y(x)$ bestimmen

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\phi_y}{\phi_x} = -\frac{y}{x}$$

| ϕ_x = part. Ableitung nach x

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \log y = -\log x + \text{const}$$

$$\Rightarrow y = \frac{C}{x}$$

Beweis, dass Höhen- und Feldlinien $\perp$ stehen

"Orthogonal-Trajektorien"

~~auf der~~

Wenn $d\vec{r}$ längs der Höhenlinie liegt, dann ist $d\phi = 0$

$$0 = \operatorname{grad}\phi \cdot d\vec{r}_{\text{Höhenl.}}$$

Gradient in Zylinderkoordinaten

$d\phi = \operatorname{grad}\phi \cdot d\vec{r}$ (koordinatenunabhängig)

$\phi = \phi(r,\varphi,z)$

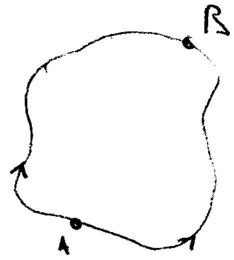
$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}dr + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}d\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

$$d\vec{r} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi + dz\,\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad}\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

Potential

Es sei $\operatorname{rot}\vec{j} \equiv 0$



$$\oint_C \vec{j}\cdot d\vec{s} = \int_{A_c} \operatorname{rot}\vec{j}\, d\vec{f} = 0$$

$\int_A^B \vec{j}\,d\vec{s}$ ist vom Wege unabhängig

$\downarrow$

$-\vec{F}\cdot d\vec{s}$: Wenn $\vec{F}$ ein Kraftfeld ist, dann ist $-\int_0^B \vec{F}\,d\vec{s}$ die auf dem Weg von 0 nach B geleistete Arbeit

Das Potential ϕ des Vektorfeldes $\vec{j}$ ist

$$\phi(\vec{r}_B) = -\int_0^B \vec{j}\cdot d\vec{s} \quad (\text{wenn } \vec{j} \text{ wirbelfrei})$$

$\rightarrow$ "konservative Kraftfelder"

Potential → Kraft

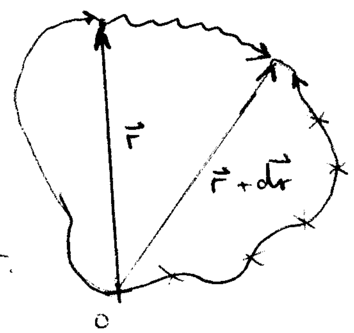
Wenn ϕ gegeben als Potential des Vektorfeldes $\vec{j}(\vec{r})$,
dann gilt: $\vec{j} = -\operatorname{grad}\phi$

Beweis:

$$d\phi = \phi(\vec{r}+d\vec{r}) - \phi(\vec{r}) = \operatorname{grad}\phi \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_0^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{j}\cdot d\vec{s} + \int_0^{\vec{r}} \vec{j}\, d\vec{s} = -\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{j}\cdot d\vec{s}$$

$$= -\vec{j}\cdot d\vec{r} \quad {}^{1)}$$



Potential ex. dann, wenn keine Rotation vorhanden ist.

Es sei ϕ gegeben, und es sei $\vec{j} = -\operatorname{grad}\phi$ ein Vektorfeld,
dann ist die Rotation von $\vec{j}$ identisch Null, denn $\operatorname{rot}\operatorname{grad} \equiv 0$

$$\operatorname{rot}\vec{j} = \left(\frac{\partial j_y}{\partial z} - \frac{\partial j_z}{\partial x}, \frac{\partial j_z}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial z}, \frac{\partial j_x}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial x}\right)$$

$$\operatorname{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\phi$$

$$\vec{j} = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$\underline{\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi} = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}, \ldots, \ldots\right) = (0,0,0)$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{j}$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial j_y}{\partial z} - \frac{\partial j_z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial j_z}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial z}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial j_x}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial x}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 j_y}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 j_y}{\partial z\partial x} + \ldots + \quad = 0 \Rightarrow \text{„Wirbel haben keine Quellen"}$$

---

1) m: Mittelwertsatz der Integralrechnung

Vektorpotential

Jedes quellenfreie Vektorfeld $\vec{j}$ lässt sich als Rotation, oder Wirbel, eines anderen Vektorfeldes $\vec{A}$ darstellen. $\vec{A}$ heißt das Vektorpotential von $\vec{j}$.

$$\int_{A_C} \mathrm{rot}\,\vec{A}\, d\vec{f} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint_{\text{Oberfläche}} \mathrm{rot}\,\vec{A}\, d\vec{f} = 0 \qquad = \int_V \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}\, d\vec{f}$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} \equiv 0$$

Theo 29.10.04

rot grad $\phi = 0 \leadsto$ wenn rot $\vec{j} = 0$ dann ist $\vec{j} =$ grad ϕ möglich

$\phi = \phi + C$ ist auch möglich

div rot $\vec{a} = 0$

Satz: Wenn div $\vec{j} \equiv 0$ dann $\exists\ \vec{a}$ sodass $\vec{j} =$ rot $\vec{a}$

Bew.: Ansatz $= \{0, f(x,y,z), g(x,y,z)\}$

$$\text{rot}\,\vec{a} = \left\{\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial x}\right\} \stackrel{?}{=} (j_x, j_y, j_z)$$

$$g(x,y,z) = \int j_y(x,y,z)\,dx + \gamma(y,z)$$

$$f(x,y,z) = -\int j_z(x,y,z)\,dx + \phi(y,z)$$

$$j_x \stackrel{?}{=} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial y} = -\int dx \left(\frac{\partial j_z(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} j_y(x,y,z)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\phi - \frac{\partial}{\partial y}\gamma$$

$$\text{div}\,\vec{j} = \frac{\partial}{\partial x} j_x + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} j_y + \frac{\partial}{\partial z} j_z}_{-\frac{\partial}{\partial x} j_x} \stackrel{!}{=} 0$$

$$j_x \stackrel{?}{=} \int dx \frac{\partial}{\partial x} j_x + \frac{\partial}{\partial z}\phi - \frac{\partial}{\partial y}\gamma$$

$$j_x \stackrel{?}{=} j_x + \alpha(y,z) + \frac{\partial}{\partial z}\phi - \frac{\partial}{\partial y}\gamma$$

$\vec{j} =$ rot $\vec{a} \leadsto$ div $\vec{j} = 0$

$\vec{a}$ heißt Vektorpotential von $\vec{j}$

Wenn man $\vec{a}$ durch $\vec{a}$ + grad ψ ersetzt, dann ändert sich $\vec{j}$ nicht weil $\vec{j} =$ rot $(\vec{a}$ + grad $\psi) =$ rot $\vec{a}$ ist wegen rot grad $\psi = 0$ für bel. ψ

Beispiel

$$\vec{j} = \left\{ x^2 (y-z) , y^2 (z-x) , z^2 (\quad) \right\} \qquad \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = 2x(y-z) + 2y(z-x) + 2z(x-y)$$

$$f = -z^2 \left(\frac{x^2}{2} - yx \right) \quad ; \quad g = y^2 \left(zx - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$j_x \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial z} f - \frac{\partial}{\partial y} g = -2z \left(\frac{x^2}{2} - \cancel{yx} \right) - 2y \left(\cancel{zx} - \frac{x^2}{2} \right) = x^2 (y-z) \quad !$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v}$$

Beh.: $(\vec{v}\ \operatorname{grad}) \vec{v} = -\vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2$

Beweis für erste Komponente

$$v_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} v_x + v_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} v_x + v_z \frac{\partial}{\partial z} v_x = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} v^2)_x - v_y \partial_x v_y - v_z \partial_x v_z$$
$$+ v_y \partial/\partial y\ v_x + v_z \frac{\partial}{\partial z} v_x$$

$$= \frac{1}{2} (\operatorname{grad} v^2)_x - v_y (\operatorname{rot} v)_z + v_z (\operatorname{rot} v)_y$$

$$= \frac{1}{2} (\operatorname{grad} v^2)_x - (\vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v})_x$$

$$\frac{1}{2} (\operatorname{grad} v^2)_x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \right) = \frac{1}{2} \left(2 v_x \frac{\partial}{\partial x} v_x + 2 v_y \frac{\partial}{\partial x} v_y + 2 v_z \frac{\partial}{\partial x} v_z\right)$$

Divergenz des Gradienten - Laplace Op.

$$\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\text{div grad } \phi = \text{div } (\partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi)$$

$$\Delta \phi := \partial_x^2 \phi + \partial_y^2 \phi + \partial_z^2 \phi$$

$\uparrow$

Laplace-Operator

$\Delta \phi = 0 \Rightarrow$ Laplace Gleichung

$\Delta \phi = \rho(x, y, z) \Rightarrow$ Poisson Gleichung

Weiterführung Euler-Gleichung

Euler: $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} = \left[\text{grad } (\rho g z) \text{ bzw } -\rho \text{ grad } (g z)\right] - \text{grad } p$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 \right) + \rho \text{ grad } gz + \text{grad } p = 0$$

Stationäre Strömung $\frac{\partial v}{\partial t} \equiv 0$

Wirbelfreie Strömung: $\text{rot } \vec{v} \equiv 0$

inkompressible Fl.: $\rho \equiv \text{const}$

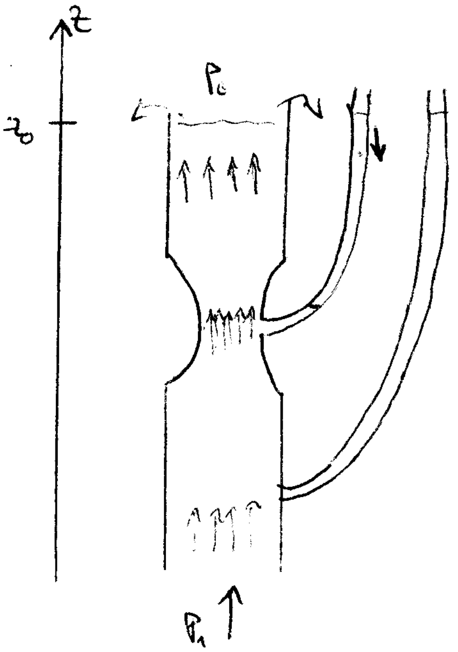
Massenerhalt:

Dichte ρ — Kontinuitätsgleichung

Massenstrom $\vec{j} = \rho \vec{v}$ — $\dot{\rho} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{v} = 0$

Bernoulli:

$$\rho \text{ grad} \left(\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \equiv 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \equiv \text{const.}$$



Wasserstrahlpumpe

$$Q(z)\cdot v(z) = \text{const} = w$$

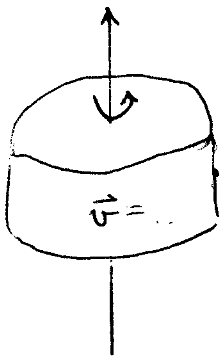
$$p(z) = \rho\frac{v_0^2}{2} + p_0 - \rho\frac{v^2(z)}{2} + \rho g z$$

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{const} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}$$

$$p(z) = p_0 + \underbrace{\rho g z}_{<0} + g(v_0^2 - v^2)$$

$$p(z) = p_0 + \rho g z + \frac{\rho}{2}\underbrace{\left(\frac{w^2}{Q(0)^2} - \frac{w^2}{Q^2(z)}\right)}_{<0}$$

Zu Aufg. 9



$$\vec{v} = \ldots$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

$$\rho\left(\underbrace{-\vec{v}\times \operatorname{rot}\vec{v}}_{\stackrel{?}{=}0} + \frac{1}{2}\operatorname{grad} v^2 - g \operatorname{grad} z\right) + \operatorname{grad} p = 0$$

rotation verschwindet nicht!

$$\operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right)$$

Oberfläche : $p = p_0$

Theo 1.11.04

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 + gz + \frac{\operatorname{grad} p}{\rho} = 0 \qquad (1)$$ Vektor

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \qquad (2)$$ Skalar — 4 Größe

$\rho \equiv \text{const.}$ 5. Größe

einfache Fälle:

i) wirbelfrei und quellenfrei

$\operatorname{rot} \vec{v} \equiv 0$ $\qquad$ $\operatorname{div} \vec{v} \equiv 0$

$\vec{v} = \operatorname{grad} \phi$ $\qquad$ $\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \Delta \phi = 0$

ii) wirbelfrei aber mit Quellen behaftet

$\operatorname{rot} \vec{v} \equiv 0$

$v = \operatorname{grad} \phi$ $\qquad$ $\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \text{Quellen} \Rightarrow \Delta\phi = q(\vec{r}, t)$ Poissongl.

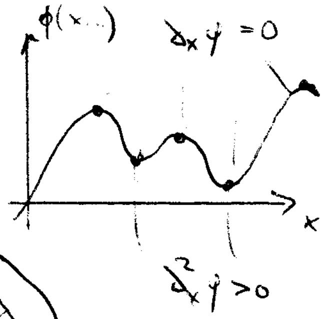
iii) quellenfrei aber mit Wirbel

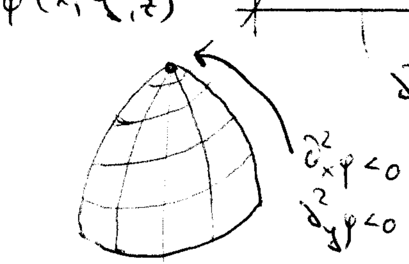
$\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{a}$

Betrachtung der Laplace-Gleichung

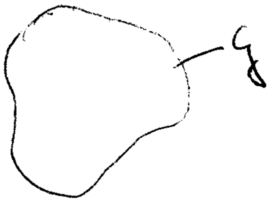
$\Delta \phi = 0$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$





Wenn $\phi(x,y,z)$ eine Lsg von $\Delta\phi = 0$ im Gebiet G ist, dann müssen alle Extremwerte von φ auf dem Rand von G liegen



Kugelsymmetrie für die Laplace-Gleichung

$\phi = \phi(r)$; $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\phi = \phi\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$

$\frac{\partial}{\partial x}\phi(r) = \phi'(r)\cdot\frac{x}{r}$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(r) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\phi'(r)\,\frac{x}{r}\right) = \phi''(r)\frac{x^2}{r^2} + \phi'(r)\cdot\frac{1}{r} - \phi'(r)\frac{x}{r^2}\cdot\frac{x}{r}$

ebenso für y und z

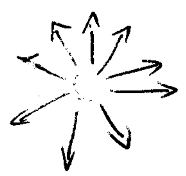
$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(r) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(r) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi(r)$

$= \phi''(r) + \frac{3}{r}\phi'(r) - \phi'(r)\,\frac{r^2}{r^3}$

$= \phi''(r) + \frac{2}{r}\phi'(r) \stackrel{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \phi = \frac{\beta}{r} + \alpha$

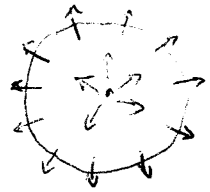
Zugehörige Strömung:



$\vec{v} = \operatorname{grad}\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}, 0, 0\right)$

$= \left(-\frac{\beta}{r^2}, 0, 0\right)$ in Kugelkoordinaten

Fluss durch eine Kugeloberfläche, Radius a



$\oint_a \vec{v}\, d\vec{f} = -\beta \oint \frac{1}{r^2}\vec{e}_r \ldots$; $d\vec{f} = r^2 d\vartheta \sin\vartheta\, d\varphi\, \vec{e}_r$

$= -\beta\,\frac{1}{\cancel{r^2}}\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r\cdot \cancel{r^2}\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = -4\pi\beta$ unabhängig vom Radius!

$\Rightarrow$ Quellenfreiheit ist tatsächlich gegeben

$\operatorname{div}\vec{v} = 0$ im ganzen Raum außer bei $r=0$

$\rightarrow$ Felderzeugender Punkt

$$\Delta\phi = \operatorname{div}\vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{für } r \neq 0 \\ \infty & \text{für } r = 0 \end{cases} \;\widetilde{=}:\; \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{0})$$

$$\left(\Delta \frac{1}{r}\right) = \varrho = \operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{r}$$

$$\int\limits_{\text{Kugel mit Radius } a} \varrho \, dV = \cancel{\oint \operatorname{div}\vec{v}} = \oint \vec{v}\cdot d\vec{f} = -4\pi \qquad \text{mit } \beta = 1$$

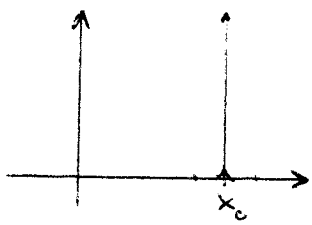
$\Rightarrow$ ϱ hat die Eigenschaft, dass das Volumenintegral

$$\int_g \varrho \, dV = \begin{cases} 0, & \text{wenn der Punkt } r=0 \text{ nicht in } g \text{ liegt} \\ -4\pi, & \text{wenn " " in } g \text{ liegt} \end{cases}$$

$$\boxed{\Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_0)}$$

Die Delta Funktion

$\delta^{(1)}(x-x_0)$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\,dx = 1 = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta(x-x_0)\,dx$$

$$\delta(x-x_0) \xrightarrow{\lambda\to\infty} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\, e^{-\lambda(x-x_0)^2}$$ Familie der Gauß-Glockenkurven

als Beispiel für eine Funktion, bei der das Integral 1 wird

Exkurs: Gaußsches Integral

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda (x-x_0)^2} \, dx$$

$$\sqrt{\lambda}\,(x-x_0) = y$$

$$\sqrt{\lambda}\, dx = dy$$

$$\rightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-y^2}}_{I}$$

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-y^2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-y^2}\, dx\, e^{-x^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{dx\, dy}_{\displaystyle\downarrow \atop \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r\,dr\,d\varphi} \underbrace{e^{-(x^2+y^2)}}_{\displaystyle\downarrow \atop \displaystyle e^{-r^2}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r\,dr\, e^{-r^2}$$

$$I^2 = 2\pi \left. \frac{-e^{-r^2}}{2} \right|_0^{\infty} = \pi \qquad \rightsquigarrow \; I = \sqrt{\pi}$$

Kandidat für Quell- und Wirbelfreie Strömung

$\vec{v} = \text{grad}\, \phi$

$\phi = \sum_j \frac{\alpha_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|}$; G sei ein Gebiet, in dem keines der $\vec{r}_j$ liegt, dann ist $\vec{v}$ in G quell- und wirbelfrei

$\rightsquigarrow$ $\text{rot}\, \vec{v} = 0$ $\quad$ $\text{div}\, \vec{v} = 0$ in G

Stationär $\left(\text{d.h. } \frac{\partial}{\partial t}\phi = 0\right)$

Euler:

$$\text{grad}\left(\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\varrho}\right) = 0$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\text{div}\, \vec{v} = 0$$

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\varrho} = \frac{p_0}{\varrho}$$

Oberfläche : $p = \tilde{p}_0$

$$z = \frac{p_0 - \tilde{p}_0}{\varrho g} - \frac{v^2(x,y,z)}{2g}$$ $\rightsquigarrow$ $z = z(x,y)$ beschreibt die Oberfläche

Rotationsfreie, aber nicht Quellenfreie Strömung

$\text{rot}\, \vec{v} = 0$ $\quad$ $\text{div}\, \vec{v} = \frac{k \sin kr}{r}$ $\quad$ (Beispiel)

$\vec{v} = \text{grad}\, \phi$

$\text{div grad}\, \phi = \frac{k^2 \sin kr}{r}$

$\phi = \phi(r)$

$\Delta\phi = \phi'' + \frac{2}{r}\phi' = \frac{k^2 \sin kr}{r}$ $\quad$ raten: $\phi = -\frac{\sin kr}{r}$

$$-\phi' = k \cdot \frac{\cos kr}{r} - \frac{\sin kr}{r^2}$$

$$-\phi'' = -k^2 \frac{\sin kr}{r} - 2k\frac{\cos kr}{r^2} + \frac{2 \sin kr}{r^3}$$

(✓)

8.11.04

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \text{grad}\left(\phi(\vec{r})\right) + \frac{1}{\rho}\,\text{grad}\,p = 0 \quad ; \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\text{grad}\right)\vec{v}$$

Flüssigkeiten: $\rho \equiv \text{const}$

$$\frac{1}{\rho}\,\text{grad}\,p = \text{grad}\,\frac{p}{\rho}$$

Gase: $\rho \neq \text{const}$

Es sei $p = p(\rho)$ bzw $\rho = \rho(p)$

gilt: i) wenn $T \equiv \text{const}$

ii) wenn das Gas adiabatisch "isentropische" Prozesse

ideales Gas: $p \sim \rho^{\kappa}$; $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 5/3,\ 7/5$

$p = p(\rho)$ $\quad \text{grad}(p) = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \dots, \dots\right)$

$$= \left(p' \frac{\partial \rho}{\partial x}, \dots, \dots\right) = p'(\rho)\cdot\text{grad}\,\rho$$

$$\frac{1}{\rho}\,\text{grad}\,p = \frac{p'(\rho)}{\rho}\cdot\text{grad}\,\rho$$

(Enthalpie)

$w(\rho)$: $\text{grad}\,w(\rho) = w'(\rho)\,\text{grad}\,\rho$

Baue $w(\rho)$ so, dass $w'(\rho) = \frac{p'(\rho)}{\rho}$ ist.

Also $\frac{dw}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho} \Rightarrow w = \int \frac{d\rho}{\rho}\,p'(\rho)$

z.B.:

i) $p = A\cdot\rho \rightsquigarrow$ ~~$w = A\int$~~ $w = A\int\frac{d\rho}{\rho} = A\cdot\log\rho$

ii) $p = A\cdot\rho^{\kappa} \rightsquigarrow$ ~~$w = A\int\rho^{\kappa-1}d\rho$~~ $w = A\kappa\int\rho^{\kappa-2}d\rho = \frac{\kappa}{\kappa-1}\rho^{\kappa-1}$

~~$w = A\frac{\rho^{\kappa}}{\kappa}$~~ $\quad w = A\cdot\frac{\kappa}{\kappa-1}\rho^{\kappa-1}$

$$\text{grad}\,w = \frac{p'}{\rho}\,\text{grad}\,\rho = \frac{1}{\rho}\,\text{grad}\,p$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \text{grad}(\phi + w) = 0$$

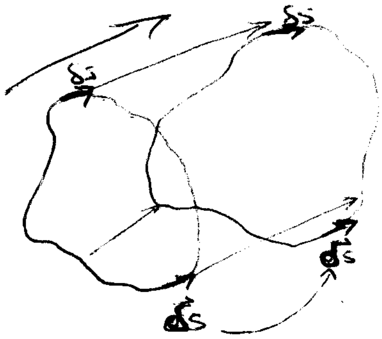
i) $w = \log\rho$

ii) $w = A\cdot\frac{\kappa}{\kappa-1}\rho^{\kappa-1} \sim T$
$= c_p\cdot T$

Thompson: Erhaltung der Zirkulation

wenn $\frac{d\vec{v}}{dt}$ = grad(irgendwas), dann ist

die Zirkulation $\Gamma = \oint \vec{v}\cdot d\vec{s}$ zeitlich konstant!

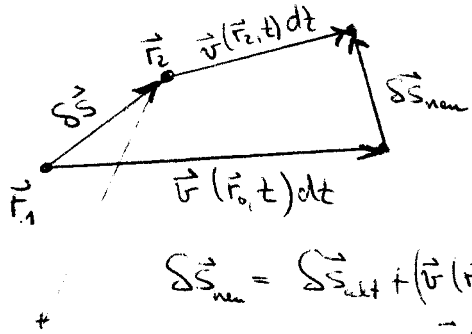


die Kurve schwimmt mit der Strömung mit und verändert sich dabei.

Die Wirbel werden mitgenommen!

$$\frac{d}{dt}\Gamma = \oint \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\delta\vec{s} + \oint \vec{v}\cdot\frac{d}{dt}\delta\vec{s}$$

$$= \oint \frac{d\vec{v}}{dt}\delta\vec{s} + \oint \vec{v}\underbrace{\left(\vec{v}(\vec{r},t) - \vec{v}(\vec{r}+\delta\vec{s},t)\right)}_{-\frac{\delta\vec{v}}{d\vec{r}}\delta\vec{s}}$$



$$\delta\vec{s}_{neu} = \delta\vec{s}_{alt} + \left(\vec{v}(\vec{r}_1,t) - \vec{v}_2(\vec{r}_2,t)\right)dt$$

$$\frac{d}{dt}\Gamma = \oint\frac{d\vec{v}}{dt}\delta\vec{s} - \oint\vec{v}\cdot d\vec{v}$$

$$= \underbrace{\int \mathrm{rot}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)\delta\vec{s}}_{\mathrm{rot\,grad} = 0} - \underbrace{\frac{1}{2}\oint d(v^2)}_{0 = -\frac{1}{2}v^2\Big|^{\text{obere Gr.}\uparrow}_{\text{untere Gr.}\downarrow}}$$

$$\frac{d}{dt}\Gamma = 0$$

Impulserhaltung in Strömungen

$\rho, \vec{j}$ erhalten $\Rightarrow$ $\dot\rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0$

Impuls ist erhalten!

Dichte der x-Komponente des Impulses sei $p^{(x)}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \operatorname{grad}(\phi + w) = 0 \qquad \dot\rho + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

Dichte des Impulsstromes "der Sorte" $p^{(x)}$ sein $\vec{j}^{(x)}$

$$p^{(x)} = \rho v_x$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) = -\operatorname{div} \vec{j}^{(x)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) = \dot\rho v_x + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$= -v_x \operatorname{div}(\rho\vec{v}) + \rho\left(\frac{d\vec{v}}{dt} - (\vec{v}\cdot\operatorname{grad})\vec{v}\right)$$

$$= -v_x \operatorname{div}(\rho\vec{v}) + \rho(-\operatorname{grad}(\phi + w)) - \rho(\vec{v}\cdot\operatorname{grad})\vec{v} \overset{?}{=} -\operatorname{div}(\ldots)$$

$$= -v_x(\partial_x(\rho v_x) + \partial_y(\rho v_y) + \partial_z(\rho v_z)) - \rho(v_x \partial_x v_x + v_y \partial_y v_x + v_z \partial_z v_x) + \rho\,\partial_x(\phi + w)$$

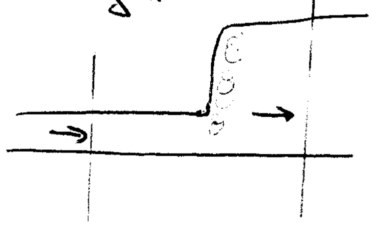
$$= \partial_x(\rho v_x^2) + \partial_y(\rho v_x v_y) + \partial_z(\rho v_x v_z) + \partial_x(p)$$

Vorschlag $j_i^{(1)} = \rho v_i v_1 + p\,\delta_{i1}$

$$\partial_i j_i^{(1)} = \sum_i \partial_i(\rho v_i v_1) + \partial_x p$$

$$\boxed{j_i^{(j)} = \rho v_i v_j + p\,\delta_{ij}}$$

Hydraulischer Sprung



... Impulserhaltung   Theo 12.11.04

Impulsdichte: $\rho^{(i)} = \rho v_i$

gesucht: Impulsstromdichte: j_{ik} sodass

$$\partial_t \rho^{(i)} + \underbrace{\partial_k j_{ik}}_{\text{Summe}} = 0$$

Massenerhaltung

$$\dot\rho + \operatorname{div}(\rho \vec v) = 0$$

entweder $\rho \equiv \text{const}$
oder $\phi \equiv 0$

Euler:

$$\frac{dv_i}{dt} = \partial_t v_i + \underbrace{v_k \partial_k v_i}_{\text{Summe}} = -\partial_i(p + \rho\phi)$$

außerdem: $\partial_t \phi$

$$\partial_t \rho^{(i)} = \partial_t(\rho v_i) = \dot\rho v_i + \rho \partial_t v_i$$

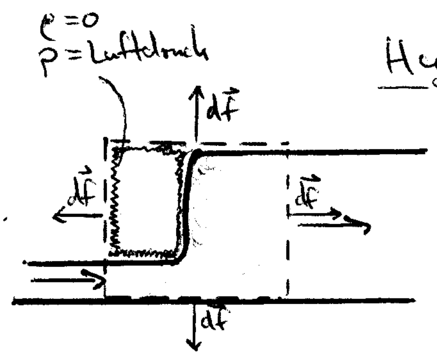
$$= -v_i \underbrace{\partial_k(\rho v_k)} - \underbrace{(\rho v_k)\partial_k} v_i - \partial_i(p + \rho\phi)$$

(Produktregel)

$$= -\partial_k(\rho v_i v_k)$$

$$= -\partial_k \left[\rho v_i v_k + \delta_{ik}(p + \rho\phi)\right]$$

$$\rightsquigarrow j_{ik} = \rho v_i v_k + \delta_{ik}(p + \rho\phi)$$



Hydraulischer Sprung

$$\dot\rho^{(i)} + \operatorname{div} \vec j_i = 0$$

Gauss: $$\int_V \left(\dot\rho^{(i)} + \operatorname{div} \vec j_i\right) dV = 0$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V \rho^{(i)}\, dV}_{0} + \oint_\sigma \vec j_i \cdot d\vec f = 0$$

Analytische Funktionen im Komplexen

$w = f(z)$

f ist ableitbar
nicht analytisch z.B. $|z|$, $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$
f lässt sich Taylor-entwickeln

Bsp.:

$w = z^2$ $\qquad z = x + iy \qquad x, y, \varphi, \psi$ reell
$\qquad\qquad w = \varphi + i\psi$

zur Erinnerung:
$\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0 \rightsquigarrow \vec{v} = \mathrm{grad}\,\phi$
$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$
$\rightsquigarrow \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi = \Delta\phi = 0$

$\varphi + i\psi = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$
$\varphi = x^2 - y^2$; $\psi = 2xy$
$\Delta\phi = 2 - 2 = 0$
$\Delta\psi = 0 + 0$

dies gilt für jede analytische Funktion
Funktion genügt immer der Laplace-Gleichung!

$w = \sqrt{z}$
$(\phi + i\psi)^2 = x + iy$
$\phi^2 - \psi^2 = x$; $2\phi\psi = y$
$\psi = \frac{y}{2\phi}$; $\boxed{\phi^2 - \frac{y^2}{4\phi^2} = x}$

$\boxed{\frac{y^2}{4\psi^2} - \psi^2 = x}$ $\qquad \phi^4 - x\phi^2 - \frac{y^2}{4} = 0$
$\phi = \sqrt{\frac{x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}}$ .. ψ analog

---

$\Rightarrow$

$w = \sin(z)$

$\phi + i\psi = \sin(x+iy)$

$\quad = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$

$\phi = \sin x \cosh y$

$\psi = \cos x \sinh y$

$w = \log(z)$

$e^{\phi + i\psi} = x + iy$

$e^{\phi}\cos\psi = x$

$e^{\phi}\sin\psi = y$

$\phi = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$

$\psi = \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$

---

allgemein:

$w = f(z)$

$\phi + i\psi = f(x+iy)$

$\partial_x\phi + i\partial_x\psi = f'(x+iy)$

$\partial_y\phi + i\partial_y\psi = i\, f'(x+iy) = i(\partial_x\phi + i\partial_x\psi)$

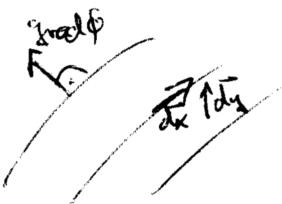
$$\boxed{\begin{aligned}\partial_y\phi &= -\partial_x\psi\\ \partial_y\psi &= \partial_x\phi\end{aligned}}$$

Cauchy-Riemann Diff. Gl.

$\partial_y^2\phi = -\partial_{yx}\psi = -\partial_x^2\phi \qquad \Delta\phi = 0$

ϕ sei ein Geschwindigkeitspotential: $\vec{v} = \mathrm{grad}\,\phi = (\partial_x\phi, \partial_y\phi)$

Vergleiche mit Kontour-Linien $\phi = \mathrm{const}$



$0 = d\phi = \partial_x\phi\, dx + \partial_y\phi\, dy = (\partial_x\phi, \partial_y\phi)\cdot(dx, dy)$

Was ist mit grad ψ?

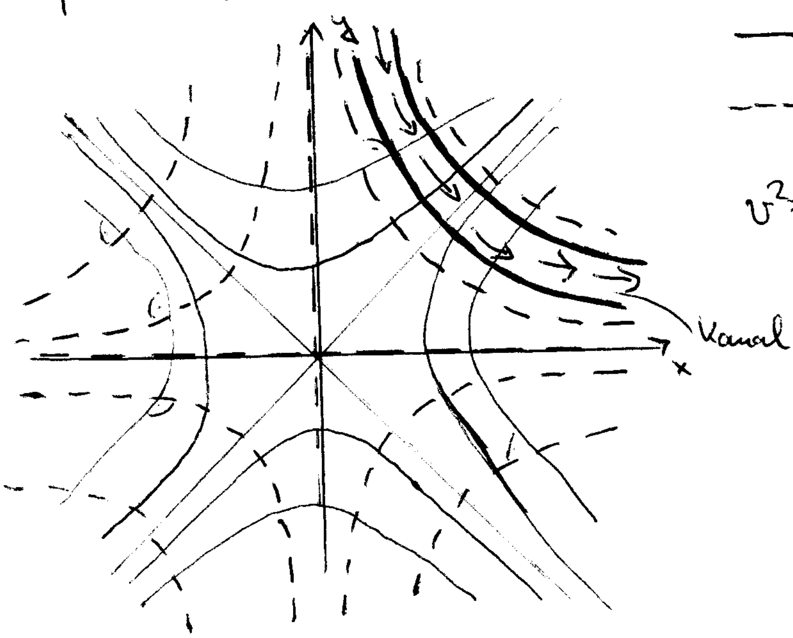
$$\mathrm{grad}\,\psi = (\partial_x \psi, \partial_y \psi) = (-\partial_y \phi, \partial_x \phi)$$

$$\mathrm{grad}\,\psi \cdot \mathrm{grad}\,\phi = 0$$

wenn $\vec{v} = \mathrm{grad}\,\phi$, dann sind $\psi = \mathrm{const}$ die Stromlinien

Beispiel: $w = z^2$

$\phi = x^2 + y^2 \leadsto \vec{v} = 2(x, -y)$



— $\phi = \mathrm{const}$

--- $\psi = \mathrm{const}$

$v^2 = 4(x^2 + y^2)$

Kanal:

Bernoulli: $\frac{v^2}{2} + gz + p = \mathrm{const}$

Oberfläche: $p = \mathrm{const}$

$$z = \frac{\Delta p}{g} - \frac{2(x^2+y^2)}{g}$$

Variation von z muss klein bleiben! (Näherung)

Näherung ist unkontrolliert

Schwerewellen

$w = \alpha z + \beta \sin(kz)$ mit α, β, k reell

$\phi = \alpha x + \beta \sin(kx) \cdot \cosh(ky)$

$\psi = \alpha y + \beta \cos(kx) \cdot \sinh(ky)$

$\vec{v} = \operatorname{grad} \phi = (\alpha + \beta k \cos(kx) \cosh(ky), \beta k \sin(kx) \sinh(ky))$

Stromlinien: $\psi = 0$

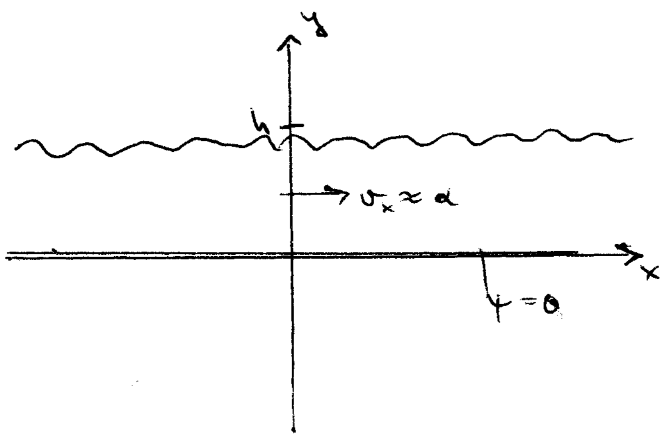
$\beta \ll 1$ $\quad \psi = h \cdot \alpha \quad y = h + \eta$

$$0 = \alpha \eta + \beta \cos kx \cdot \sinh k(h+\eta)$$

$$= \alpha \eta + \beta \cos kx \cdot \left(\sinh(kh) + \eta \cdot \cosh(kh) + \ldots\right)$$

$$\eta = -\frac{\beta}{\alpha} \cos(kx) \sinh(kh) \Big/ 1 - \frac{\beta}{\alpha} \cosh(x) \cosh(kh)$$

$$\eta \approx -\frac{\beta}{\alpha} \cos kx \sinh(kh)$$



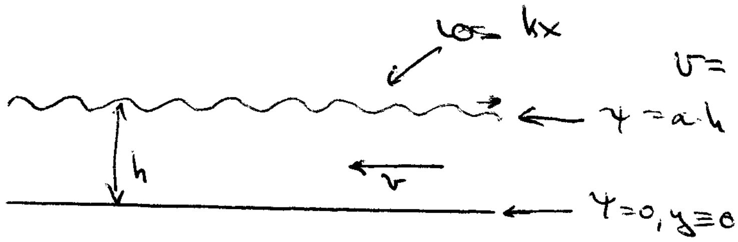
...

$v = \sqrt{\frac{g}{k} \cdot \tanh(k \cdot h)}$; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ Wellenzahl

$$\rightarrow \begin{cases} \sqrt{gh} & kh \ll 1 \text{ sehr flaches Wasser} \rightarrow \text{hydr. Sprung} \\ \sqrt{\frac{g}{k}} & kh \gg 1 \text{ tiefes Wasser} \end{cases}$$

Theo 15.11.04

Wasserwellen



$v = \sqrt{\frac{1}{k} g \cdot \tanh(hk)}$; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$w = \alpha z + \beta \sin(kz) = \phi + i\psi$

$\vec{v} = \operatorname{grad} \phi$, $\psi = \text{const} \Rightarrow$ Stromlinien

$\phi = \alpha x + \beta \sin kx \cosh ky$

$\psi = \alpha y + \beta \cos kx \sinh ky$

Stromlinie für $\psi = \alpha \cdot h$ lautet

$\alpha h = \alpha y + \beta \cos(kx) \sinh(ky)$

Kleine Amplituden: $\beta \ll 1$, $\beta \sinh(kh) \ll 1$

<u>Ansatz</u>: $y = h + \eta$; $\eta \ll 1$

$\alpha \cdot h = \alpha h + \alpha \eta + \beta \cos(kx) \cdot \sinh(kh + k\eta)$

$\sinh(kh + k\eta) \approx \sinh(kh) + k \cosh(kh) \cdot \eta$

| $f(a+\varepsilon) = f(a) + f'(a) \cdot \varepsilon$ (Taylor)

$0 = \alpha\eta + \beta \sinh(kh) \cos(kx) + \beta k^2 \cosh(kh) \cdot \eta \cdot \cos(kx)$

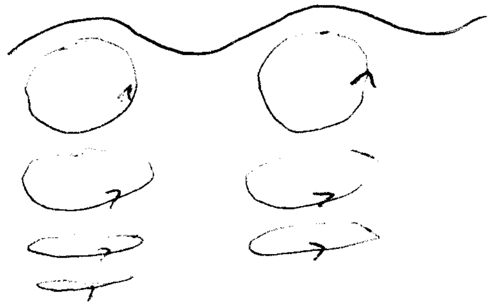
$\Leftrightarrow \eta = \frac{-\beta \sinh(kh) \cdot \cos(kx)}{\alpha + \beta k^2 \cosh(kh)} \approx -\frac{\beta}{\alpha} \sinh(kh) \cdot \cos(kx)$ beschreibt die Oberfläche

Druck? ...

$y = h - \frac{\beta}{\alpha} \sinh kh \cdot \cos kx$

$\vec{v} = \operatorname{grad} \phi = \left(\alpha + \beta k \cosh(x) \cosh(ky), \beta k \sin(\cancel{kx}) \overset{\sinh}{\cancel{\cosh}}(ky) \right)$

$\Rightarrow$



Bernoulli: $\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gy = \text{const}$ $\rightarrow$ const?) auf $y = h+\eta$???) für Druck

$\cancel{\frac{v^2}{2}} = \frac{\alpha^2}{2} + \alpha\beta k \cosh(x) \cosh(ky) + \frac{p}{\rho} + g\cdot h + g\cdot\frac{-\beta}{\alpha}\sinh(kh)$

$\cdot\cos(kx) \overset{?}{=} \text{const}$

Vereinfachungen:

$\cosh(ky) = \cosh(kh + k\cdot\eta) \simeq \cosh(k\eta + \alpha\eta)$

const ist erfüllt, wenn $\alpha\beta k\cosh(kh) = g\frac{\beta}{\alpha}\sinh(kh)$

$\rightsquigarrow \alpha^2 = \frac{g}{k}\tanh kh$

$v = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh(kh)} \longrightarrow \begin{cases} \sqrt{g\cdot h} & k\cdot h \ll 1 \quad \text{flaches Wasser} \\ \sqrt{g/k} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} & k\cdot h \gg 1 \quad \text{tiefes Wasser} \end{cases}$

Schall

Eulergleichung: $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \operatorname{grad} p = 0$ (ohne Gravitation)

Kont.: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$ 5 Unbekannten müssen bedient werden!

ideale Gasgleichung $p = \frac{RT}{\mu} \rho$ $\quad v_{vol} = \frac{\mu}{\rho} \Leftrightarrow \rho = \frac{\mu}{v_{mol}}$

$$u = c_v \cdot T$$

1. Hauptsatz $\quad dU = T \cdot ds - p \cdot dv_{vol} = T ds - \mu p \, d\left(\frac{1}{\rho}\right)$

wir fordern $ds \overset{!}{=} 0$, sinnvoll, da prozess isentropisch → reversibel

$$\rightsquigarrow du = -\mu p \, d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \mu \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

$$c_v dT = \mu \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

$$\frac{\mu}{R} c_v d(p/\rho) = \mu \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

$$\Leftrightarrow \frac{c_v}{R}\left(\frac{dp}{d\rho} - p \frac{d\rho}{\rho^2}\right) = p \frac{d\rho}{\rho^2}$$

$$\kappa := \frac{c_p}{c_v}$$

$$\Leftrightarrow c_v \left(\frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho}\right) = R \cdot \frac{d\rho}{\rho} = (c_p - c_v) \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\Leftrightarrow c_v \cdot \frac{dp}{p} = c_p \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \kappa \frac{d\rho}{\rho}$$

Einschub Thermodynamik (für später) $\boxed{!!!}$

Enthalpie $h := u + pv = u + \mu p \frac{1}{\rho}$

$dh = dU + \mu \frac{dp}{\rho} - \mu \frac{p}{\rho^2} d\rho = \mu \frac{dp}{\rho}$ $\quad \frac{dh}{h} = \frac{\mu}{c_p} \frac{dp}{\rho T} = \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} = \frac{c_p}{c_v} \frac{R}{c_p} \cdot \frac{d\rho}{\rho}$

$$h = c_v T + RT = (c_v + R) T = c_p T$$

Kleine Amplituden!

$\vec{v}$ sei klein, Glieder höher als 1. Ordnung werden vernachlässigt

$p = p_0 + \delta p$, δp sei klein

$\varrho = \varrho_0 + \delta\varrho$, $\delta\varrho$ sei klein

$$(\varrho_0 + \cancel{\delta\varrho}) \frac{d\vec{v}}{dt} + \operatorname{grad} \delta p = \varrho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \cancel{(\vec{v}\operatorname{grad})\vec{v}} \right) + \operatorname{grad} \delta p = 0$$

$$\Rightarrow \varrho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \delta p = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \delta\varrho}{\partial t} + \varrho_0 \cdot \operatorname{div} + \varrho_0 \cdot \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v}\, \cancel{\operatorname{grad}\, \varrho} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \delta\varrho}{\partial t} + \varrho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{dp}{p} = \kappa \frac{d\varrho}{\varrho}$$

$$\varrho\, dp = \kappa p\, d\varrho$$

$$\varrho_0\, d\delta p = \kappa p_0 \frac{d\delta\varrho}{dt}$$

$$\frac{\partial \delta\varrho}{\partial t} = \frac{\varrho_0}{\kappa p_0} \frac{\partial \delta p}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\kappa p_0} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \delta p + \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \qquad (3)$$

$$\operatorname{div}(1) - \varrho_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t}(3)$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \operatorname{grad} \delta p - \frac{\varrho_0}{\kappa p_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta p = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta p - c^2 \Delta p = 0}$$ Wellengleichung

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2} v_i - c^2 \Delta v_i = 0}$$

Theo 19.11.04

Wellengleichung

$$\ddot{p} - c^2 \Delta p = 0$$

Es sei $p = p(x,t)$

$\Rightarrow$ Lösung: $p(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$

Probe:

$$\ddot{p}(x,t) - c^2 p''(x,t) = 0 \qquad \text{in einer Dimension}$$

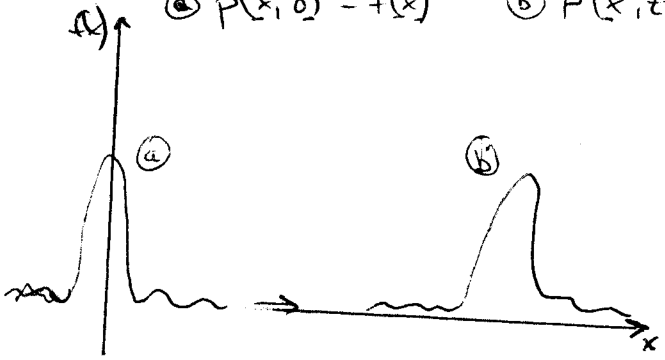
$$\dot{p} = -c \cdot f'(x-ct) + c \cdot g'(x+ct)$$

$$\ddot{p} = c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct)$$

$$p'' = f''(x-ct) + g''(x+ct)$$

$$\ddot{p} - c^2 p'' = 0 \qquad (\checkmark)$$

ⓐ $p(x,0) = f(x)$ ⓑ $p(x,t=1) = f[x-c]$



mit der Linearisierung läuft der Schall unverfälscht weiter

$$c^2 = \frac{\kappa R T_0}{\mu}$$

Schallgeschwindigkeit leitet sich aus den thermodyn. Eigenschaften der Luft ab.

Es sei $p[x,t] = A \cdot \sin[k(x-ct)] = A \cdot \sin[kx - \omega t]$

Ampl. Wellenzahl Kreisfrequ.

$\Rightarrow p[x,t] = A \cdot e^{ikx - i\omega t}$ "Ebene Welle"

komplex (evt. Phasenversch.)

$p[\vec{r},t] = A \cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$; $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ Wellenzahlvektor

$\Rightarrow$ Wellennormale

$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{a}$

$p[\vec{r}+\vec{a},t] = p[\vec{r},t]$ wenn $\vec{k}\cdot\vec{a} = 0$ (Bewegung in der Wellenfront)

<u>Akustische Verschiebungen beim Donner</u>

- Euler: $\rho(\dot{v} + v v') + p' = 0$ (in einer Dim.) $\Rightarrow \dot{v} + v v' + \frac{p'}{\rho} = 0$
- Kont.: $\dot{\rho} + \rho v' + \rho' v$ $\Rightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} + v' + v\frac{\rho'}{\rho} = 0$

$\Rightarrow \frac{p'}{\rho} = \frac{1}{\mu} h'$ (Enthalpie) ; $\frac{d\rho}{\rho} = c_v \cdot dh \cdot \frac{1}{Rh}$

$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = c_v \cdot \dot{h} \cdot \frac{1}{Rh}$ $\frac{\rho'}{\rho} = c_v h' \cdot \frac{1}{R \cdot h}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \dot{v} + v v' + \frac{1}{\mu} h' = 0 \\ c_v \dot{h} + v c_v h' + v' = 0 \end{array}}$$

partiell, nicht linear $\Rightarrow$ schwer

aber: ~~expl.~~ unabh. Variablen kommen nicht direkt vor (x,t)

Vermutung:

$\cancel{v = v(h)} \Rightarrow h = H(v) \Rightarrow \dot{h} = H'\dot{v}$, $h' = H'v'$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dot{v} + v v' + \frac{1}{\mu} H' v' = 0 \\ \frac{1}{R \cdot H} c_v H'(\dot{v} + v v') + v' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{RH}\frac{c_v}{\mu} H'^2 v' = v' \quad ; v' \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{H'^2 = \frac{\mu R \, H}{c_v}} \qquad \frac{H'}{\sqrt{H}} = \sqrt{\frac{\mu R}{c_v}}$$

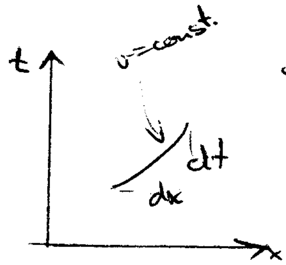
$$2\sqrt{H} = \sqrt{\frac{\mu R}{c_v}}\, v + \beta \qquad\qquad c_p T_0 = H(v=0) \rightsquigarrow \beta = 2\sqrt{c_p T_0}$$

$$h = \frac{H}{g} = \left(\sqrt{\frac{\mu \cdot R}{4 c_v}}\, v + \sqrt{c_p T_0}\right)^2$$

(Aus Gleichung oben:)

$$\dot{v} + v v' + \frac{2}{\mu}\sqrt{\frac{\mu R}{4 c_v}} \left(\sqrt{\frac{\mu \cdot R}{4 c_v}}\, v + \sqrt{c_p T_0}\right) v' = 0 \quad \Rightarrow h \text{ wurde eliminiert}$$

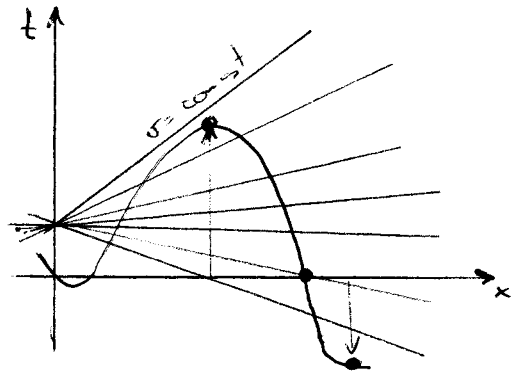
<u>gesucht:</u> $v = v[x,t]$

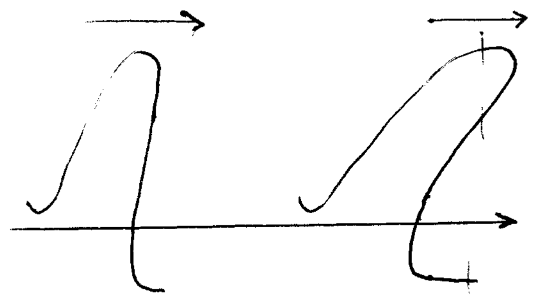


Suche Linien mit $v = \text{const}$:

$$0 = dv = v'\,dx + \dot{v}\,dt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{\dot{v}}{v'} = \alpha v + \gamma \quad \text{(Konstanten subst.)}$$

$\Rightarrow$ Linien mit $v = \text{const}$ sind alle Geraden





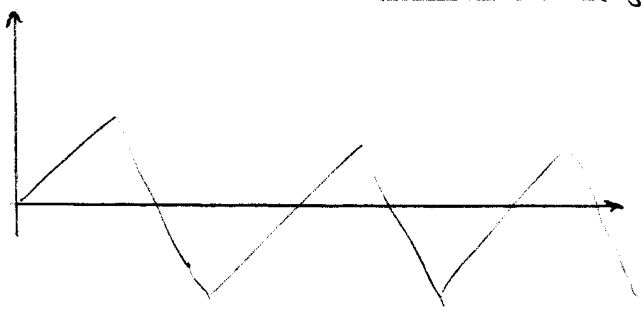
Welle müsste eigentlich überkippen (aber math. nicht möglich)

als Grenzfall wird der Abfall senkrecht → Stoßwelle

überkippen wird durch dann nicht mehr vernachlässigbare Reibung verhindert

Theo 22.11.04

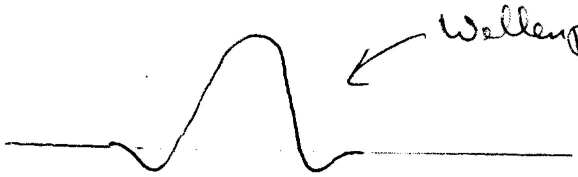
Fourierintegrale



$\Rightarrow$ Fourier-Reihe

$\cos(\pi n x)$, $\sin(\pi n x)$

$c = \sqrt{\frac{g}{k}}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\Leftarrow$ Dispersion: Wellengeschw. hängt von Wellenlänge ab



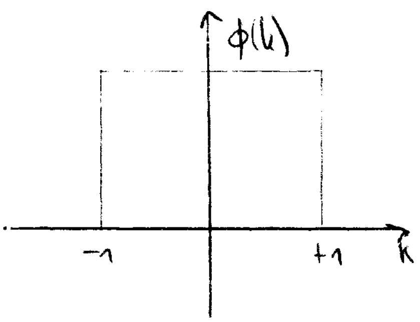
Wellenpaket passiert das Medium nicht unbeschadet

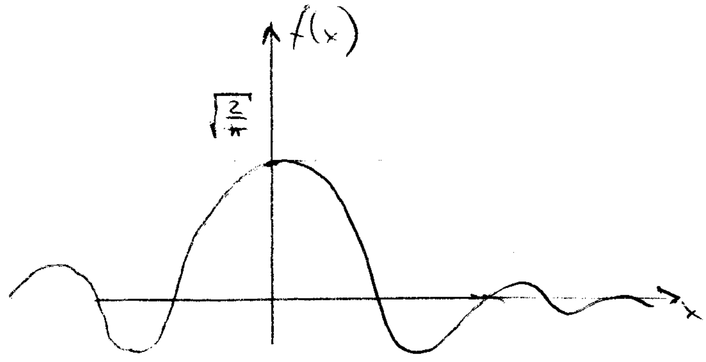
Fourierintegral: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{ikx} \, dk$

$$\phi(k) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } |k| \leq 1 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-1}^{1} e^{ikx} \, dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikx}}{ix} \Bigg|_{-1}^{+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{ix}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x}$$





je breiter $\phi(k)$, desto schmaler $f(x)$ $\Rightarrow$ "reziprokes Gitter"

umgekehrt

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} \, dx$$

$$f(x) \overset{?}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikx} f(y)\, e^{-iky}\, dy$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-y)}\, dk \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left(\cos k(x-y) + i \sin k(x-y)\right)$$

$$\to \int_{-L}^{+L} dk \cos k(x-y) \quad (-L)$$

$$\to 2 \int_0^{\infty} dk \cos k(x-y)$$

$$2\,\mathrm{Re} \int_0^{\infty} dk\, e^{ik(x-y)} = \ldots \quad \ldots = 2\pi\, \delta(x-y)$$

$$\int_0^{\infty} dk\, e^{i(x-y)k} = \cancel{\int_0^{\infty} dk\, e^{iz(k+i\varepsilon)} = \int_0^{\infty} dk}$$

$$= \int_0^{\infty} dk\, e^{i(z+i\varepsilon)k} = \int_0^{\infty} dk\, e^{ikz - \varepsilon k} = \left.\frac{e^{ikz-\varepsilon k}}{iz - \varepsilon}\right|_{k=0}^{k=\infty}$$

$$= \frac{-1}{iz-\varepsilon} = \frac{\varepsilon + iz}{z^2+\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon}{z^2+\varepsilon^2} + \frac{iz}{z^2+\varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \ldots$$

$$\ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{z^2+\varepsilon^2}\, dz \underset{z = \varepsilon u}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\ldots = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon \cdot du}{\varepsilon^2 u^2 + \varepsilon^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \pi = \operatorname{Arctan}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{2\pi}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y)\, \delta(x-y) \overset{!}{=} f(x)$$

Theo 26.11.04

Elektrodynamik

$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$; ρ = el. Ladungsdichte
$\vec{D}$ = el. Felddichte

"el. Ladungen sind die Quellen des el. Feldes"

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$; $\vec{B}$ = mag. Felddichte (Flussdichte)

"Magnetfeld hat keine Quellen $\Rightarrow$ Feldlinien müssen geschlossen sein"

Verknüpfung Mag. und El.

Induktion: $\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$; $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$

("gilt ohne Draht und Voltmeter")

$\vec{D}$: Ladung, $\vec{E}$: Kraft $\Rightarrow F = m \cdot a$

$\Rightarrow$ "Warum erzeugen Felder Kräfte?"

ε sind nicht nur Proportionalitätskonstanten

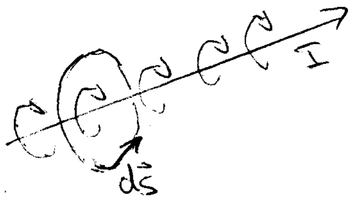
$$\int_A \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{f} = - \int_A \dot{\vec{B}}\, d\vec{f} = -\frac{d}{dt} \underbrace{\int_A \vec{B} \cdot d\vec{f}}_{\Phi \text{ mag. Fluss}}$$

$$\xrightarrow{\text{Stokes}} \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{f}$$

$$\Rightarrow U_{ind} = -\dot{\Phi}$$

Ampere'sches Gesetz:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{f}$$; H = mag. Feldstärke



$$\vec{B} = \underbrace{\mu \mu_0}_{\text{Permeabilität}} H$$

$$\int_A (\mathrm{rot}\,\vec{H} - \vec{j}) \cdot d\vec{f} = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}$$ vorläufig

$$\underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{rot}}_{0}\,\vec{H} = \mathrm{div}\,\vec{j} \Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$$

Erhaltungssatz: $\dot{\rho} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0 \Rightarrow \dot{\rho} = 0$

Ladungsdichte dürfte sich nicht ändern $\rightarrow$ Unfug

Maxwell: $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = \mathrm{div}\,\vec{j} + \underbrace{\dot{\rho}}_{\mathrm{div}\,\dot{\vec{D}}}$ (?)

$$\Rightarrow \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$$

$$0 = \mathrm{div}\,j + \dot{\rho}$$

Das $+\dot{\vec{D}}$ fällt in den üblichen Experimenten nicht ins Gewicht

$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$	$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$	$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$
$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$	$\mathrm{rot}\,\vec{H} = j + \dot{\vec{D}}$	$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$

$\Rightarrow$ 2. Zeitableitung durch $+\dot{\vec{D}}$! $\Rightarrow$ Wellengleichung !!!

"Epiphänomen"

$\dot{\vec{p}} = \vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ Lorentz-Kraft (Unterscheidung Coulomb-Kraft und Lorentzkraft $= \vec{v} \times \vec{B}$ ist nicht zu empfehlen)

Verbindung zur Mechanik

$\Rightarrow$ Konsequenzen

1.) Statik $\quad \frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$

$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$	$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$
rot $\vec{E} = 0$	rot $\vec{H} = \vec{j}$ } (quasi-statisch)
div $\vec{D} = \rho$	div $\vec{B} = 0$

$\Rightarrow$ Im statischen Fall entkoppeln el. und mag. Felder

Elektrostatik $\qquad$ Magneto-Quasistatik

rot $\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \, \phi$ mit $\vec{E} = -\text{grad}\, \phi$

div $(\varepsilon \varepsilon_0 \, \text{grad}\, \phi) = \rho \qquad$ Grundgleichung der Elektrostatik

ε sei stückweise konstant

$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 7$	$\varepsilon = ?$

in jedem Stück: div grad $\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}$

$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0} \qquad$ Poissongleichung

Elektrostatik

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \qquad \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{grad} \phi) = -\rho$$

In jedem Gebiet, in welchem $\varepsilon = \text{const}$ gilt:

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

<u>Punktladung</u>: $\rho(\vec{r}) = q \cdot \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{a})$

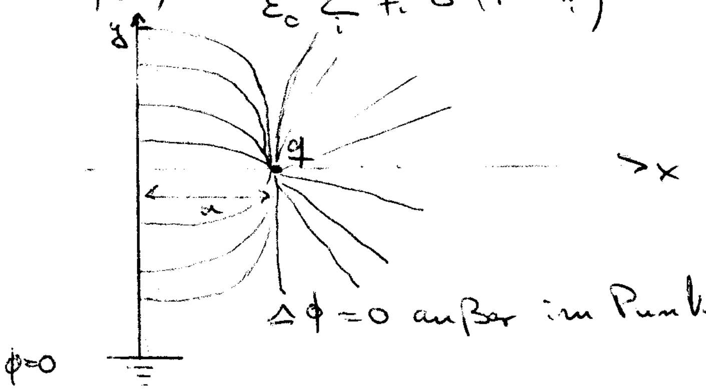
$$\Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|} = -4\pi\, \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{a})$$

$\rightarrow$ Potential einer Punktladung am Orte $\vec{r} = a$ ist:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{a}|}$$

$$\phi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i\, \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i)$$



Influenzvorgang

$\Delta\phi = 0$ außer im Punkte $x = a$

Leiter: $\phi = \text{const}$

Methode der Spiegelladungen:

$$\phi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-a)^2+y^2}} - \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x+a)^2+y^2}} & \text{wenn } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

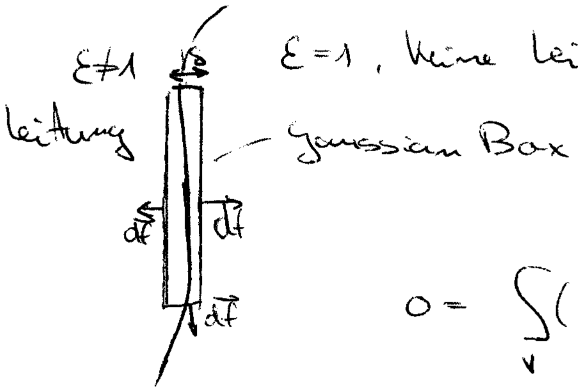
Beh.: $\phi(x,y)$ ist Lsg. von $\Delta\phi = -q \cdot \delta^{(3)}(\dots) \cdot \frac{1}{\varepsilon_0}$ mit $\phi(0,y) \equiv 0$

Elektrisches Feld : $\vec{E} = -\text{grad}\,\phi$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}^3} - \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}^3}\,,\ \frac{y}{\sqrt{x+a\ldots}^3} - \frac{y}{\sqrt{x\ldots}^3}\right)$$

$$\vec{E}(0,y) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{2a}{\sqrt{a^2+y^2}^3}\,,\ 0\right)$$

Verteilung der neg Ladungen auf der Platte?



$$0 = \int_V (\text{div}\,\vec{D} - \rho)\,dV$$

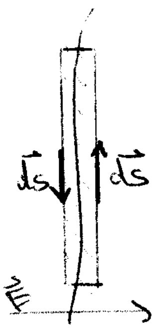
$$= -\int \rho\,dV + \oint \vec{D}\,d\vec{f}$$

$$= -\rho_F + (D_{2n} - D_{1n})$$

Für Divergenz ($\text{div}\,\vec{D} = \rho$)

Unstetigkeit!

$$\boxed{\rho_F = D_{2n} - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{D_{1n}}}}$$



analog mit Stokes

$$0 = \int_A \text{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{f} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

Für Rotation ($\text{rot}\,\vec{E} = 0$)

$$= \vec{E}_{2tang} - \vec{E}_{1tang} = 0$$

Stetigkeit!

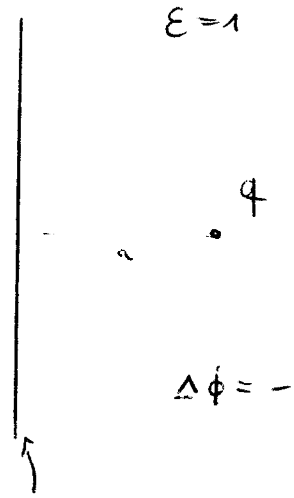
$$\vec{D}(0,y) = \varepsilon_0\,\vec{E}(0,y)$$

Unstetigkeit!

$$\| \quad \rho_F = D_{2n} = -\frac{q\cdot a}{2\pi\sqrt{a^2+y^2}^3}$$

$\varepsilon > 1$
Dielektrikum

$\varepsilon = 1$



$$\Delta\phi = -\frac{q}{\varepsilon_0}\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{a})$$

$\Delta\phi = 0$

$\rho \equiv 0$

D_n stetig!
E_t stetig!

Gesucht: ϕ

$$\vec{D} = \varepsilon\,\varepsilon_0\,\vec{E} \quad ; \quad \vec{E} = -\operatorname{grad}\phi$$

Ansatz
$$\phi = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-a)^2+y^2}} - \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x+a)^2+y^2}} & ; x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{q''}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\sqrt{(x-a)^2+y^2}} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

$$E(x=0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} \left(\dfrac{q(-a)}{\sqrt{}^3} - \dfrac{q'(+a)}{\sqrt{}^3},\ \dfrac{y(q-q')}{\sqrt{}^3}\right) \\[2ex] \left(\dfrac{q''(-a)}{\varepsilon\sqrt{}^3},\ \dfrac{q''y}{\varepsilon\sqrt{}^3}\right) \end{cases}$$

$$\cancel{D_y = \frac{1}{4\pi}\begin{cases} \dfrac{y(q-q')}{\sqrt{}^3} & x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{y\,q''}{\sqrt{}^3} & x \leq 0 \end{cases}}$$

~~soll stetig sein~~ $\cancel{\rightsquigarrow q'' = q - q'}$

$$D_x = \frac{1}{4\pi}\begin{cases} -a(q'+q) \\ -a\,q'' \end{cases} \rightsquigarrow q'' = q' + q$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} y(q-q')/\sqrt{}^3 \\[1ex] \dfrac{y\,q''}{\varepsilon\sqrt{}^3} \end{cases} \rightsquigarrow q'' = \varepsilon(q-q')$$

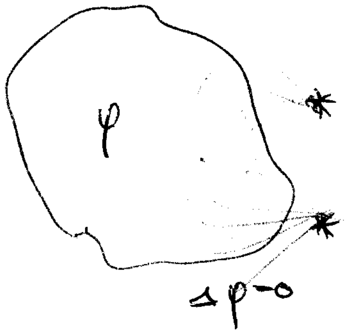
$$q''\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) = 2q$$

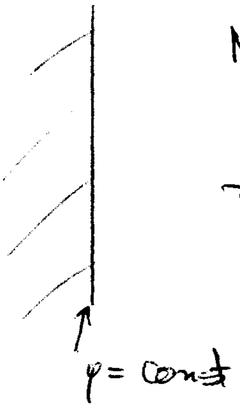
$$q'' = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}\, q$$

$$q' = q'' - q = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\, q$$

Spiegelladungen a.d. Kugel

Theo 3.12.04

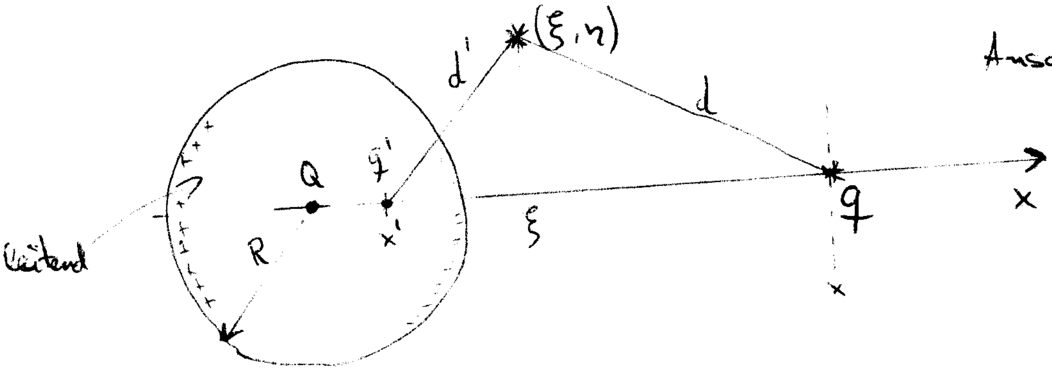




Normalkomponente von D stetig, od. Sprung entspr. Ladungsschichte

Tangentialkomp von E sind stetig

Spiegelladungen an der Kugeloberfläche



Ansatz: Spiegellad. bei x'

$$\Delta\phi = -q\,\delta^{(3)}(\vec{r}-(x,0,0))\cdot\frac{1}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

ϕ = const auf der Kugeloberfläche (2)

$\phi \equiv 0$ in der Kugel (d.h. geerdete Kugel) (3)

$$4\pi\varepsilon_0\,\phi(\xi,\eta) = \frac{q}{d} + \frac{q'}{d'}$$

$$4\pi\varepsilon_0\,\phi(\xi,\eta) = \frac{q}{\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x'-\xi)^2+\eta^2}} = \frac{q}{\sqrt{x^2-2x\xi+\xi^2+\eta^2}} + \frac{4}{\dots}$$

erfüllt (1)

$$4\pi\varepsilon_0\,\phi(\text{Kugel}) = \frac{q}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+R^2}{x}-2\xi}} + \frac{q'}{\sqrt{x'}}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2+R^2}{x'}-2\xi}} \overset{!}{=} 0 \quad \forall \xi$$

d.h. $\xi^2+\eta^2=R^2$

$$x+\frac{R^2}{x} = x'+\frac{R^2}{x'} \rightsquigarrow \text{Lsg.}: \; x x' = R^2 \qquad (\text{oder triv. } x'=x)$$

$$q' = -\sqrt{\frac{x'}{x}}\,q \qquad \boxed{q' = -\frac{x'}{R}\,q}$$

Zusätzlich:

$$4\pi\varepsilon\,\phi(\xi,\eta) = \frac{q}{\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x'\ldots}} + \frac{Q}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

Q in der Mitte der Kugel: freier Param.

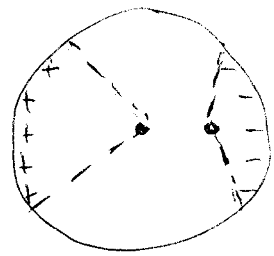
$$\phi(\text{Kugel}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Isolierte Kugel (mit Gesamtladung 0) (d.h. isoliert aufgehängt)

$Q+q'=0$

$$4\pi\varepsilon_0\,\phi_{\text{isol}}(\xi,\eta) = \frac{q}{\sqrt{(x\ldots}} + \frac{qR}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R^2}{x}-\xi\right)^2+\eta^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right)$$

Unterschied Theorie u. Experiment:



Im Experiment gibt es Ladungstrennung

Ladungsdichte bestimmen: Diskontinuität von ϕ an der Oberfläche ansetzen

$$\rho = D_{normal} = D_{rad} = -\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{grad}\,\phi \cdot \vec{e}_r$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}, \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}, 0\right)\cdot\left(\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}, \frac{\partial\phi}{\partial\eta}, 0\right)\cdot\left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, 0\right) \Bigg|_{\xi^2+\eta^2=R^2}$$

liefert $\rho(\xi,\eta)$

andere Möglichkeit: Winkel ϑ beibehalten

<u>In Kugelkoordinaten – Kugelflächenfunktionen</u>

$\Delta\phi = 0 \implies \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \quad \text{in Kugelkoord.}$$

Lösungen heißen Kugelflächenfunktionen

$\phi = \phi(r,\vartheta)$

Produktansatz zur Variablentrennung:

$\phi(r,\vartheta) = R(r)\,f(\vartheta)$

$$r^2\frac{\Delta\phi}{\phi} = \underbrace{r^2\frac{R'' + \frac{2}{r}R'}{R}}_{r\ \ -\lambda} + \underbrace{\frac{f'' + \cot\vartheta\, f'}{f}}_{\vartheta\ \ +\lambda} \overset{!}{=} 0 \qquad \text{keine } \varphi\text{-Abh.!}$$

$$r^2R'' + 2rR' + \lambda R = 0 \qquad (1)$$

$$f'' + \cot\vartheta\, f' - \lambda f = 0 \qquad (2) \quad \text{Legendre}$$

$$f(\vartheta) = P(\cos(\vartheta)) \to P(x)$$

$0 \dots \pi$ $\quad x := \cos(\vartheta)$ subst

$$f'(\vartheta) = -P'\sin\vartheta$$

$$f''(\vartheta) = P''\sin^2\vartheta - P'\cos\vartheta$$

$$P''(x)\left(1-x^2\right) - P'(x)\,x - P'[x]\,x - \lambda P[x] = 0$$

$$\boxed{\left(1-x^2\right) P''[x] - 2x P'[x] - \lambda P[x] = 0} \quad \text{Legendre-DGL}$$

<u>Potenzreihenansatz:</u>

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad a_0, a_1 \text{ sind Parameter (vorgegeben)}$$

$$x^n: \; -a_n\, n(n-1) + a_{n+2}(n+2)(n+1) - 2n a_n - \lambda a_n = 0 \quad \forall n$$

$\rightarrow$ Rekursionsformel

$$a_{n+2} = \frac{n(n-1) + 2n + \lambda}{(n+1)(n+2)}\, a_n = \frac{n(n+1)+\lambda}{(n+1)(n+2)}\, a_n$$

$$P(\pm 1) \stackrel{?}{=} \to \infty \qquad n \to \infty: \; a_{n+2} \simeq a_n \Rightarrow P(x) \simeq (a_0 + a_1 x) \sum x^{2n} = \frac{a_0 + a_1 x}{1-x^2}$$

$a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $\lambda = -l(l+1)$; l gerade

$a_1 = 1$, $a_0 = 0$, $\lambda = -l(l+1)$; l ungerade

$\Rightarrow$ Potenzreihe bricht ab $\Rightarrow$ Legendrepolynome

Weiterführung Kugelflächenfunktionen
Theo C. 12.04

$\Delta\phi = 0$

$\Delta\phi = \Delta\phi(r,\vartheta) = \Delta\left(R(r)f(\vartheta)\right)$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$

$f(\vartheta) = P_\ell(\cos\vartheta)$ Legendre Polynome

$$\boxed{\begin{aligned}&(1-x^2)P_\ell''(x) - 2xP_\ell'(x) + \ell(\ell+1)P_\ell(x) = 0\\ &R'' + \frac{2}{r}R' - \frac{1}{r^2}\ell(\ell+1)R = 0 \qquad \Big|\cdot r^2 \Rightarrow \text{Ansatz}\end{aligned}}$$

$P_\ell(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\ell)} x^j \qquad a_{j+2}^{(\ell)} = \frac{j(j+1)-\ell(\ell+1)}{(j+1)(j+2)} a_j^{(\ell)}$; a_0, a_1 sind Integrationskonst.

$\ell = 0,2,4,\dots \Rightarrow a_1 = 0 \quad a_0 \neq 0$

$\ell = 1,3,5,\dots \Rightarrow a_1 \neq 0 \quad a_0 = 0$

Ansatz:

$R = r^\alpha$ (fast Exponentialansatz)

$\rightsquigarrow \alpha(\alpha+1) = \ell(\ell+1)$

$\rightsquigarrow \alpha = \ell \; , -(\ell+1)$

$R_\ell(r) = a\cdot r^\ell + \frac{b}{r^{\ell+1}}$

$\phi_\ell(r,\vartheta) = R_\ell(r)P_\ell(\cos\vartheta) = \left(a_\ell r^\ell + \frac{b_\ell}{r^{\ell+1}}\right)P_\ell(\cos\vartheta)$

$\phi(r,\vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(a_\ell r^\ell + \frac{b_\ell}{r^{\ell+1}}\right)P_\ell(\cos\vartheta)$

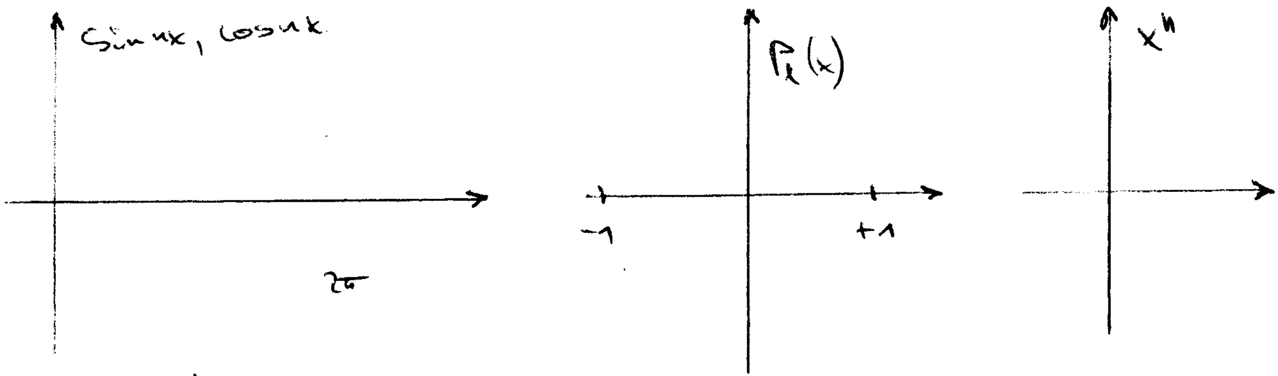
Legendre - Polynome

P_0, P_1, P_2, P_3

Rek. – Formel

l	a_0	a_1	a_2	a_3	$P_l(x)$
0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	x
2	1	0	-3	0	$1-3x^2$
3	0	1	0	$-\frac{5}{3}$	$x-\frac{5}{3}x^3$

Fourierreihen $\leftrightarrow$ Legendre Polynome $\leftrightarrow$ Taylorpolynome



Beh.: $$\int_{-1}^{+1} P_l(x)\, P_k(x)\, dx = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{l,k}$$

$$\int \dots d^3r \longrightarrow \int_0^\infty r^2 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta}$$

$$\int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta\, F(\cos\vartheta)$$

$x = \cos\vartheta$
$dx = -\sin\vartheta\, d\vartheta$

$$\int_{-1}^{+1} dx\, F(x)$$

$$\int_{-1}^{+1} dx\, P_\ell(x)\, P_k(x) = ?$$

<u>Beh.</u> $$\int_{-1}^{+1} P_\ell(x)\, P_k(x)\, dx = \frac{2}{2\ell+1}\,\delta_{\ell,k} = J_{\ell k}$$

<u>Bew.</u> (Ansatz)

$$J_{\ell k} = \frac{1}{k(k+1)} \int_{-1}^{+1} P_\ell(x) \left[2x P_k' + (x^2-1) P_k''\right]$$

part. Int.

$$= \frac{1}{k(k+1)} \left[\underbrace{(x^2-1) P_k' \Big|_{-1}^{+1}}_{=0} + \int_{-1}^{+1} dx \left(2x P_\ell P_k' - \frac{d}{dx}\left[P_\ell (x^2-1)\right] P_k'\right)\right]$$

$$= \frac{1}{k(k+1)} \int \left\{ \cancel{2x P_\ell P_k'} - \left[P_\ell'(x^2-1) + \cancel{2x P_\ell}\right] P_k' \right\} dx$$

$$= \frac{1}{k(k+1)} \int P_\ell'\, P_k'\, (-x^2+1)\, dx$$

analog für $P_k \Rightarrow$ selbes Ergebnis

$$\rightsquigarrow \ell(\ell+1)\, J_{\ell k} = k(k+1)\, J_{\ell k}$$

$$\left[\ell(\ell+1) - k(k+1)\right] J_{\ell k} = 0$$

$\rightsquigarrow J_{\ell k} = 0$, wenn $\ell \neq k$ $\square$

$\rightsquigarrow$ Legendre-Polynome sind paarweise orthogonal im Sinne der definierten Metrik

Erzeugende der Legendre Polynome

Gesucht ist eine Funktion $F(x,z)$ mit der Eigenschaft

$$F(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, z^n \qquad \text{„Erzeugende d. L. P."}$$

Lsg.: $F(x,z) = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2-2xz}}$

Normierung: $P_l(1) = 1$; $P_l(-1) = (-1)^l$

Beh.: Lsg. erfüllt die gesuchte Eigenschaft

Bew.: Subst.: $w := 1+z^2-2xz$

$$F(x,z) = f(w)$$

$\partial_x f = f_x(w) = -2z\, f'$ $\qquad \partial_z f(w) = 2(z-x)\, f'$

$\partial_{xx} f = 4z^2 f''$ $\qquad \partial_{zz} f(w) = \cancel{2f'}\; 2f' + 4(z-x)^2 f''$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left[(1-x^2)\, P_l'' - 2x\, P_l' + l(l+1)\, P_l \right] z^l = 0$$

$$(1-x^2)\, \partial_{xx} f - 2x\, \partial_x f + z\, \partial_{zz}(zf) = 0 \quad \leftarrow \text{Einsetzen } f$$

$$(1-x^2)\, 4z^2 f'' + 4xz f' + \underbrace{4z(z-x) f' + z^2(2f'}_{6z^2 f'} + 4(z-x)^2 f'') \overset{?}{=} 0$$

$$= 4f''\left(z^2 - x^2 z^2 + z^4 - 2z^3 x + z^2 x^2\right) + 6z^2 f'$$

$$= 2f''(1+z^2-2xz) + 3f' = 2f''\cdot w + 3f' = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{w}^3} - \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{w}^3} = \underline{0}$$

$\Rightarrow$

$$z\,\partial_{zz}(zf) = z\,\partial_z(f + zf') = 2z f_z + z^2 f_{zz} = 2z\,\partial_z f + z^2\,\partial_{zz} f$$

$$F(1,z) = \frac{1}{1-z} = \sum z^n \quad \checkmark$$

$\square$

$\Rightarrow$

$$\boxed{F(x,z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2-2xz}} = \sum P_n(x)\, z^n}$$

Theo 10.12.04

$$\Delta \phi = 0$$

$$\phi = \phi(r, \vartheta)$$

$$\phi = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\vartheta)$$

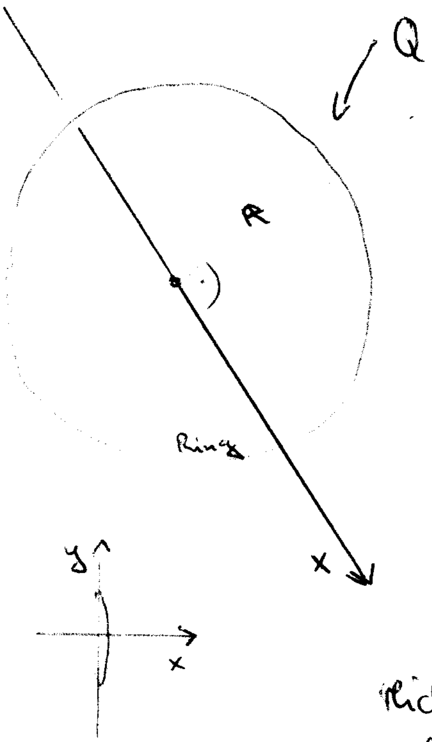
$$P_l = \sum_{j=0}^{l} a_j^{(l)} x^j \quad ; \quad a^l_{j+2} = \frac{j(j+1) - l(l+1)}{(j+1)(j+2)} a^l_j$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + z^2 - 2xz}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) z^l \; ; \; P_l(1) = 1$$

$$\int_{-1}^{+1} dx\, P_l(x) P_m(x) = \begin{cases} 0 \text{, wenn } l \neq m \\ \frac{2}{2l+1} \text{ wenn } l = m \end{cases}$$

Rodrigues: $P_l = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (1-x^2)^l$ $\rightarrow$ Literatur: Abramowitz/Stegun

Anwendung der Legendre-Polynome: el. Pot. von Ring



El. Potential im Raum?

$$\phi(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}$$

Lösung als Entwicklung in Kugelflächenfunktion spezialisiert für die Achse

$P_l(\cos 0) = 1$

$$\phi(r = x, \vartheta = 0) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l x^l + \frac{b_l}{x^{l+1}} \right)$$

nicht $a_l x^l$ im Nahbereich!
nicht b_l / x^{l+1} im Fernbereich?

- Für kleine x : Taylorreihe

$$\phi(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R\sqrt{1+\left(\frac{x}{R}\right)^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-1/2}{j}\left(\frac{x}{R}\right)^{2j}$$

$$\Rightarrow a_l = \begin{cases} 0, \text{ wenn } l \text{ ungrade} \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\binom{-1/2}{j}\frac{1}{R^{2j}}, \text{ wenn } l = 2j \end{cases}$$

Für kleine r (r < R) ist

$$\phi(r,\vartheta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-1/2}{l}\frac{P_{2l}(\cos\vartheta)}{R^{2l+1}}r^{2l}$$

- Für große x :

$r > R$

$$\phi(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x\sqrt{1+\frac{R^2}{x^2}}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-1/2}{j}\frac{R^{2j}}{x^{2j+1}}$$

; $a_l \equiv 0$

; $b_l = 0$, wenn l ungrade

$b_{2j} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}R^{2j}\binom{-1/2}{j}$

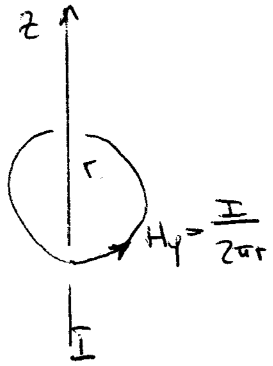
$$\phi(r,\vartheta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-1/2}{l}\frac{R^{2l}\cdot P_{2l}(\cos\vartheta)}{r^{2l+1}}$$

Magneto-Statik

$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ (Quasi)

$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{H} = j$ . . . .

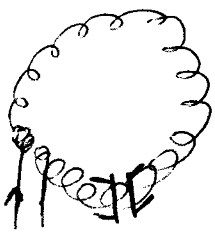
$\operatorname{div} \vec{D} = 0$
$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$
$\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi$
$\Delta \phi = 0$



$\vec{H} = H(r)\, \vec{e}_\varphi$

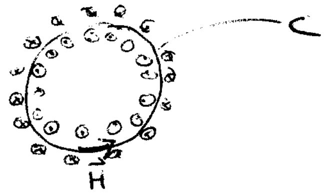
$$\underbrace{\int}_{\text{Fläche}} \operatorname{rot} \vec{H} \cdot d\vec{f} = \underbrace{\oint}_{\text{Kurve}} \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

$$I = \int_0^{2\pi} ds \; H(r) = 2\pi r \, H(r)$$



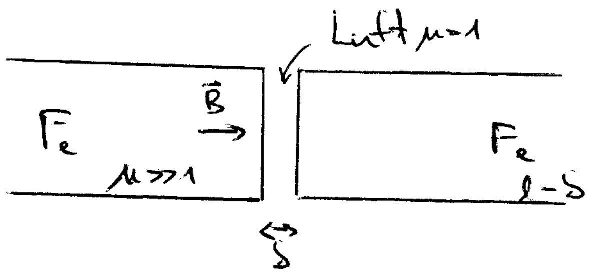
Toroidale Spule
+ Eisenkern mit Luftspalt

Stokes:



$$\int \vec{j} \cdot d\vec{f} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

$$N \cdot I = H \cdot l \quad \Rightarrow \quad H = \frac{n \cdot I}{l}$$



$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad B_{\text{normal}}$ ist stetig

$\operatorname{rot} \vec{H} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \vec{H}_{\text{tangential}}$ ist stetig

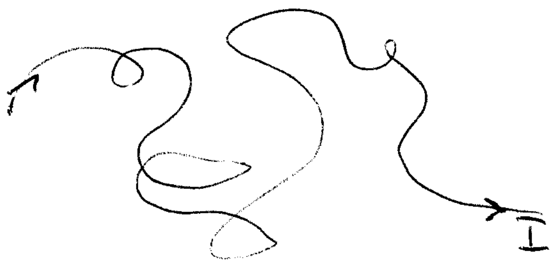
Fe: $B = \mu \mu_0 H_{Fe}$

Luft: $B = \mu_0 H_L$

$$(l - \delta) \frac{B}{\mu \mu_0} + \delta \frac{B}{\mu_0} = n I$$

$$\Rightarrow B = \frac{n \mu_0 \mu I}{\mu \delta + (l - \delta)} \approx \frac{n \mu_0 I}{\delta}$$

Beliebige Stromverteilung



Biot-Savartsches Gesetz

$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ ($\vec{A}$ Vektorpotential)

$\operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{j} \rightsquigarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$

$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta$ mit $(\Delta \vec{A})_i = \Delta A_i$ in kart. Koord.

Coulombeichung: $\operatorname{div} \vec{A} \equiv 0$

möglich, da: $\vec{B} = \operatorname{rot} (\underbrace{\vec{A} + \operatorname{grad} \psi}_{\vec{A}'}) = \operatorname{div} \vec{A} + \Delta \psi$

$\rightsquigarrow \Delta \psi = - \operatorname{div} \vec{A}$

$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$

$\Delta A_i = -\mu_0 j_i$ vgl $\Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\vec{A}(r) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3 r'}$$

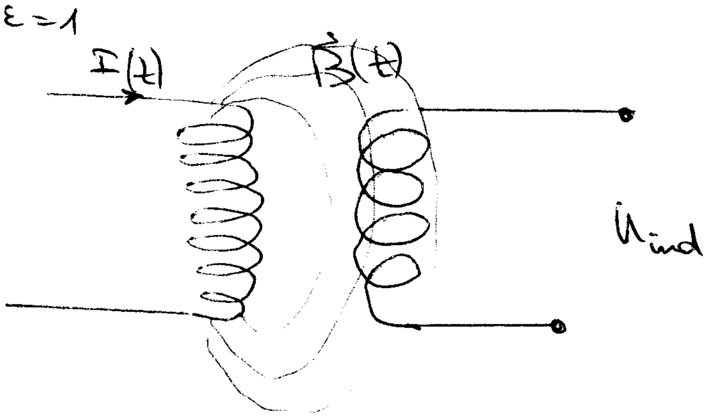
$$\phi(\vec{r}) = -\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi \varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3 \vec{r}$$

Quasi - Stationär

$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}$ $\qquad$ $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ $\qquad$ $\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$

$\mu, \varepsilon = 1$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \mathrm{rot}\, \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r'$$

$$\int \mathrm{rot}\,\vec{E}\, d\vec{f} = -\int \dot{\vec{B}}\, d\vec{f}_2$$

$$= \int_{C_2} E \cdot ds = U_{ind}$$

$$U_{ind} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{C_1 C_2} d\vec{f}_2 \cdot \mathrm{rot}\left(\frac{\dot{j}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) d^3r' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\dot{j}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d\vec{r}\, d^3r$$

$$= \frac{\mu_0 \dot{I}}{4\pi} \oint_{C_1}\oint_{C_2} \frac{d\vec{r}\, d\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = U_{ind} = -L_{12}\dot{I}$$

Selbstinduktion : $U_{ind} = -L\dot{I}$

Skin - Effekt

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad \leadsto \quad \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ $\qquad$ Eichung:

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mathrm{rot}\,\dot{\vec{A}} \quad \leadsto \quad \mathrm{rot}(\vec{E} + \dot{\vec{A}}) = 0$ $\qquad$ $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$

$\vec{E} + \dot{\vec{A}} = -\mathrm{grad}\,\phi$

$\rho \equiv 0 \qquad \varepsilon \equiv 1 \qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = 0$

$$\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{E}}_{0} + \mathrm{div}\,\dot{\vec{A}} = -\mathrm{div\,grad}\,\phi = -\Delta\phi \quad \Rightarrow \Delta\phi = 0$$

$\Delta \phi = 0$

$\rightsquigarrow \phi \equiv 0$

$\mathcal{G}$

keine Maxima im Gebiet! Rand wird ausgedehnt, Felder nehmen dann auf den Rand hin ab

$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}$; $\vec{j} = \sigma \vec{E}$; σ = Leitfähigkeit $\quad [\sigma] = \frac{A}{Vm}$

$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mu_0 \vec{j}$

$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} = -\mu_0 \sigma \vec{E} = \mu_0 \sigma \dot{\vec{A}}$

$$\boxed{\Delta \vec{A} = \mu_0 \sigma \dot{\vec{A}}} \qquad \Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma \dot{\vec{E}} \qquad \Delta \vec{j} = \mu_0 \sigma \dot{\vec{j}}$$

$$\frac{A}{L^2} = \mu_0 \sigma \frac{A}{T} \qquad T = \mu_0 \sigma L^2$$

$L = 0{,}1\,m$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$

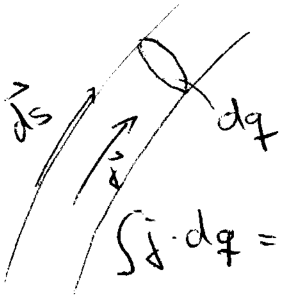
$\sigma = 6 \cdot 10^{7} \frac{A}{Vm}$

$T = \frac{24\pi}{100} \sim 1$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,') \times \vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \, d^3r'}$$ Biot-Savart

alternativ im Spezialfall : Strom im Draht

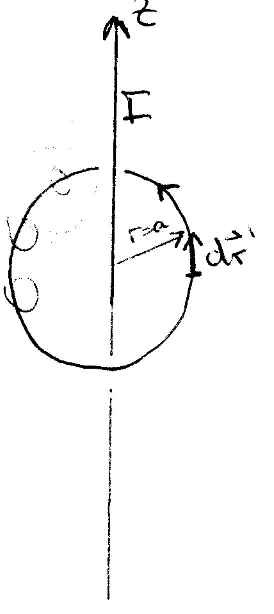
$\vec{j}(\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,' = I \cdot ds$ bzw $\vec{j}(\vec{r}\,')\, d^3 r' = I \cdot d\vec{r}\,'$



$\int j \cdot dq = I$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,') \times d\vec{r}\,'}{|\vec{r}-d\vec{r}\,'|^3}$$

Anwendung:



zyl.	kartl.
$\vec{r} = (0,0,z)$	$\vec{r} = (0,0,z)$
$\vec{r}\,' = (a,0,0)$	$\vec{r}\,' = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, 0)$
$d\vec{r}\,' = (0, a\, d\varphi, 0)$	$d\vec{r}\,' = a(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\, d\varphi$

$(\vec{r}-\vec{r}\,') \times d\vec{r}\,'$

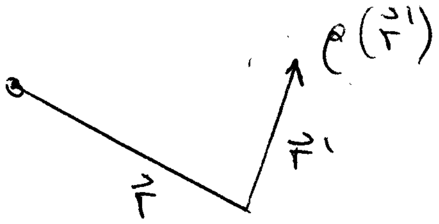
$$\begin{vmatrix} e_r & e_\varphi & e_z \\ -a & 0 & z \\ 0 & a\,d\varphi & 0 \end{vmatrix} = (-az\,d\varphi, 0, -a^2\,d\varphi)$$

$$\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ -a\cos\varphi & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = (-az\cos\varphi, -az\sin\varphi, -a^2)$$

$$\vec{B}(z) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{(az\cos\varphi, az\sin\varphi, a^2)}{\sqrt{a^2+z^2}^{\,3}} \, d\varphi$$

$$\vec{B}(z) = -\frac{\mu_0 a^2 \vec{e}_z}{2\sqrt{a^2+z^2}^{\,3}}$$

Theo 13.12.04



$$\phi(\vec r) = \int \frac{\rho(\vec r')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec r - \vec r'|}\, d^3r \qquad \text{ist Lsg von } \Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

vgl. $\Leftrightarrow \quad \Delta_r \frac{1}{|\vec r - \vec r'|} = -4\pi\, \delta^{(3)}(\vec r - \vec r')$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\rho(\vec r')}{4\pi\varepsilon_0} \Delta_r \frac{1}{|\vec r - \vec r'|} = -\frac{4\pi}{4\pi\varepsilon_0}\, \delta^{(3)}(\vec r - \vec r')\, \rho(\vec r')$

$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\Delta \int \frac{\rho(\vec r')\, d^3r'}{4\pi\varepsilon_0 |\vec r - \vec r'|}}_{\Delta\phi} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int \delta^{(3)}(\vec r - \vec r')\, d^3r' = -\frac{\rho(\vec r)}{\varepsilon_0}$

$\mathrm{rot}\, \vec H = \vec j \qquad \mathrm{div}\, \vec B = 0 \qquad \vec B = \mu_0 \vec H$

$\vec B = \mathrm{rot}\, \vec A$; Eichung: $\mathrm{div}\, \vec A = 0$

$\cancel{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \vec B = \mu_0 \vec j}$

$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \vec A = \mu_0 \vec j \qquad \mathrm{rot}\,\mathrm{rot} = \underbrace{\mathrm{grad}\,\mathrm{div}}_{=0 \text{ wg Eichung}} - \Delta$

$\Leftrightarrow \quad \Delta \vec A = -\mu_0 \vec j$

$\Leftrightarrow \quad \Delta \vec A_i = -\mu \vec j$

$\Leftrightarrow \quad \vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec j(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}\, d^3r'$

$\vec B(\vec r) = \mathrm{rot}\, \vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{rot}\left(\frac{\vec j(\vec r)}{|\vec r - \vec r'|} \right) d^3r$

$[\mathrm{rot}\, \vec a\, f(r)] = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j (a_k f) = \varepsilon_{ijk}\, a_k \partial_j f \Rightarrow \mathrm{rot}(\vec a\, f(\vec r)) = \mathrm{grad} f \times \vec a$

Theo 17.12.04

Quasistationäre E-Dynamik

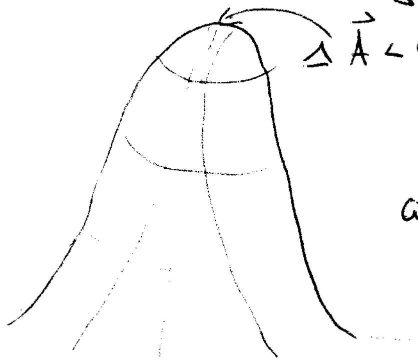
$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$

$\Delta \vec{A} = \mu_0 \sigma \dot{\vec{A}}$

$\downarrow$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

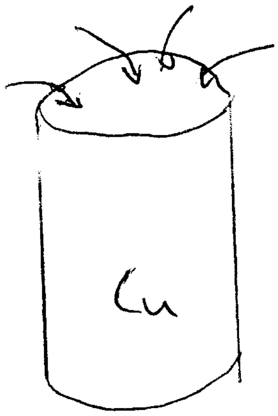
σ = Leitfähigkeit

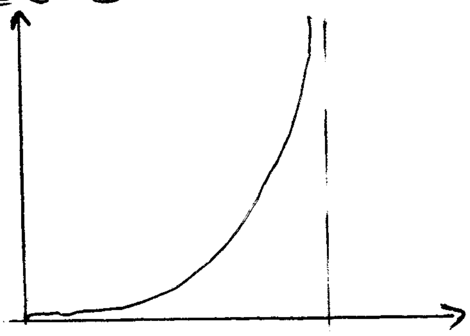


$\Delta \vec{A} < 0$ am Maximum,

da $A \sim -(x^2+y^2+z^2)$

analog: $\Delta \vec{A} > 0$ am Min





„Diffusion"

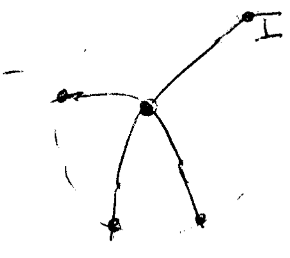
Felder diffundieren in leitfähige Materialien nur nach Maßgabe der Gleichung $\Delta \vec{A} = \mu_0 \sigma \dot{\vec{A}}$

$\Rightarrow$ bei hohen Frequenzen Skineffekt

Abschätzung für die Eindringtiefe: $L \sim \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \sigma \omega}}$

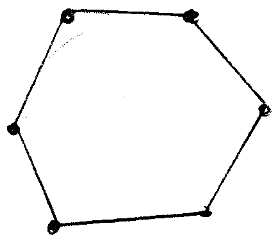
Schaltungen

- Ströme nur in Leitungen und $\dot{\vec{D}} = 0$ (außer ~~bei~~ evtl. in den Schaltelementen)
- wegen $\operatorname{div} \vec{D} = \rho \;\leadsto\; \dot{\rho} \equiv 0 \;\leadsto\; \rho \equiv 0$
-



$\dot{\rho} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \;\leadsto\; \operatorname{div} \vec{j} = 0$ (Knotenregel)

$\leadsto \oint \vec{j} \cdot d\vec{f} = 0 \;\leadsto\; \sum_{\text{Knoten}} I_i = 0$

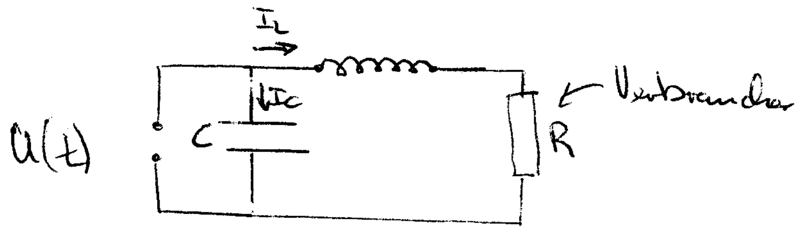


$$\text{rot}\,\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad ; \quad \dot{\vec{B}} \equiv 0 \text{ (außer evtl. in den Schaltelementen)}$$

$$\rightarrow \text{rot}\,\vec{E} = 0$$

$$\underset{\text{Fläche}}{\oint} \text{rot}\,\vec{E} \cdot d\vec{f} = 0 = \underset{\text{Kurve}}{\oint} \vec{E} \cdot ds = \underset{\text{Masche}}{\sum} U_i = 0 \quad \text{(Maschenregel)}$$

Tiefpass



$$I = I_L + I_C \qquad Q = C \cdot U_C \qquad \dot{Q} = I_C$$

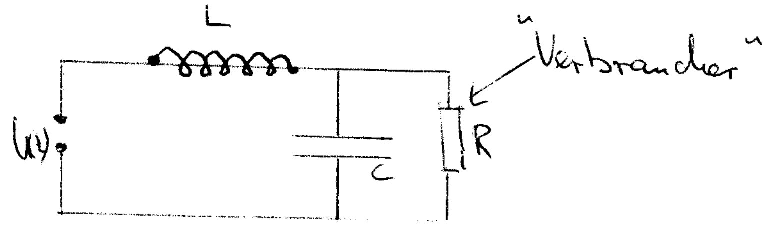
$$U_C = U(t) \qquad U_L = L\dot{I}_L$$

$$U_L + U_R = U_C \qquad U_R = R \cdot I_L$$

gesucht: $\frac{U_R}{U(t)}$ bzw. U_R

$$U_R = U(t) - U_L = U(t) - L\dot{I}_L$$

$$R I_L = U(t) - L \cdot \dot{I}_L \quad \ldots \Rightarrow \text{Müll}$$



$$I = I_C + I_R \qquad \dot{Q} = I_C$$

$$U(t) = U_L + U_C \qquad Q = C \cdot U_C$$

$$U_R = U_C \qquad U_R = R I_R$$

$$U_L = L \cdot \dot{I}$$

$$U(t) = L\dot{I} + \frac{Q}{C} = L(\dot{I}_C + \dot{I}_R) + \frac{Q}{C}$$

$$\dot{Q} = I_C = L\left(\ddot{Q} + \frac{\dot{U}_C}{R}\right) + \frac{Q}{C}$$

$$U(t) = L\left(\ddot{Q} + \frac{\dot{Q}}{RC}\right) + \frac{Q}{C}$$

1) $u(t) = 0$

$$\ddot{Q} + \dot{Q}/_{RC} + Q/_{LC} = 0$$

Exponentiellansatz: $Q \sim e^{i\omega t}$; $\dot{Q} = i\omega Q$, $\ddot{Q} = -\omega^2 Q$

$$\left(-\omega^2 + \frac{i\omega}{RC} + \frac{1}{LC}\right) Q = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{i}{2RC} \pm \underbrace{\sqrt{-\frac{1}{4R^2C^2} + \frac{1}{LC}}}_{\text{soll reell sein}} = i\gamma \pm \omega_0$$

$$Q = e^{-\gamma t} \cdot \left(A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}\right) = a \cdot e^{-\gamma t} \cos \omega t$$

$\Rightarrow$ Gedämpfte Schwingung

2) $u(t) = U_0 e^{i\Omega t}$ $\Rightarrow$ getriebener gedämpfter

$$Q_{spez} = Q_0 \cdot e^{i\Omega t}$$

$$U_0 = Q_0 \left[-L\Omega^2 + i \frac{\omega L}{RC} + \frac{1}{C}\right]$$

$$Q_0 = U_0 / [\ldots]$$

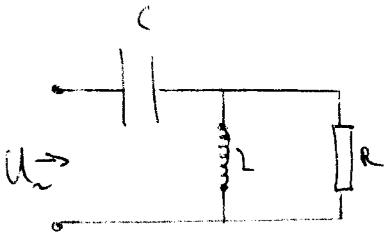
$$Q(t) = \underbrace{a \cdot e^{-\gamma t} \cos \omega t}_{\to 0} + \underbrace{\frac{U_0 \cdot e^{i\Omega t}}{[\ldots]}}_{\Uparrow}$$

Einschwingvorgang, dann eingeschwungener Zustand

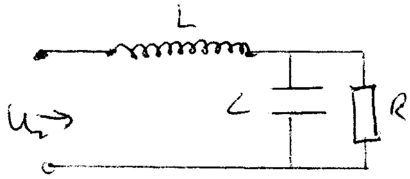
Tho. 3.01.05

Quasi-stationär Edyn / Schaltungen

$\vec{D} \equiv 0 \Rightarrow$ Schaltungen



Hochpass



Tiefpass

Kirchhoff: $\sum_{\text{Knoten}} I = 0$

$\sum_{\text{Masche}} U = 0$

Bei Hochpass:

$U_\sim + U_C + U_L = 0$; $U_L = U_R$ bzw.: $U_\sim = U_C + U_L$

$I = I_L + I_R$

Kennlinien:

$Q = C \cdot U_C$; $\dot{Q} = I \leadsto I = C \cdot \dot{U}_C$

$U_L = L \cdot \dot{I}_L$ $\Rightarrow$ Dgl

$U_R = R \cdot I_R$

Exponentialansatz: $U_C, U_L, U_R, I, \ldots \sim e^{-i\omega t} \Rightarrow$ Lsg d. hom ~~Dgl~~ Dges.

homog. Lsg $\sim e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$

wird weggedämpft $\to$ Einschwingvorgang

Nur eine spezielle Lsg. der inhomogenen Dgl bleibt übrig

$U_\sim = U_0 \cdot e^{-i\Omega t}$ (phys.: entweder $\mathrm{Re}(U_\sim)$ oder $\mathrm{Im}(U_\sim)$)

Ansatz: $U_x = U_{x0}\, e^{-i\Omega t}$ $\quad I_x = I_{x0}\, e^{-i\Omega t}$

$U_{\sim,0} = U_{C,0} + U_{L,0}$ $\quad$ ($e^{-i\Omega t}$ kürzt sich raus)

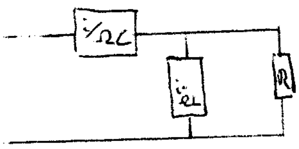
$U_{L,0} = U_{R,0}$

$I_0 = I_{L,0} + I_{R,0}$

$I_0 = -i\,\Omega C\, U_{C,0} \Rightarrow U_{C,0} = \frac{i}{\Omega \cdot C} I_0$

$U_{L,0} = -i\Omega L\, I_{L,0}$

$U_{R,0} = R\, I_{R,0}$



Der komplexe Widerstand wird als Impedanz bezeichnet

$$Z_{ges} = \frac{i}{\Omega C} + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{i}{\Omega L}} \qquad U_{\sim,0} = Z_{ges} \cdot I_0$$

Impedanz ist Frequenzabhängig!

$I_0 = \frac{U_{\sim,0}}{Z} \cdot e^{-i\alpha}$ $\quad$ wenn $Z = |Z| \cdot e^{i\alpha}$

$I = \mathrm{Re}\left(\frac{U_{\sim,0}}{|Z|} \cdot e^{-i\Omega t - i\alpha}\right) = \frac{U_{\sim,0}}{Z} \cos(\Omega t + \alpha)$ $\quad$ Phasenverschiebung

$U = \mathrm{Re}\left(U_{\sim,0}\, e^{-i\Omega t}\right) = U_{\sim,0} \cos(\Omega t)$

Leistung: $N = I \cdot U = \frac{U_{\sim,0}^2}{|Z|} \cos \Omega t \cdot \cos(\Omega t + \alpha)$

$= \frac{U_{\sim,0}^2}{|Z|} \left(\cos^2 \Omega t \cdot \cos\alpha - \cos \Omega t \cdot \sin \Omega t \cdot \sin\alpha \right)$

Vorsicht beim Quadrieren von imag. Ansätzen!

$z = x + iy$ $\quad ; \mathrm{Re}\, z^2 = x^2 - y^2$ $\quad ; (\mathrm{Re}\, z)^2 = x^2$

Mittlere Leistung:

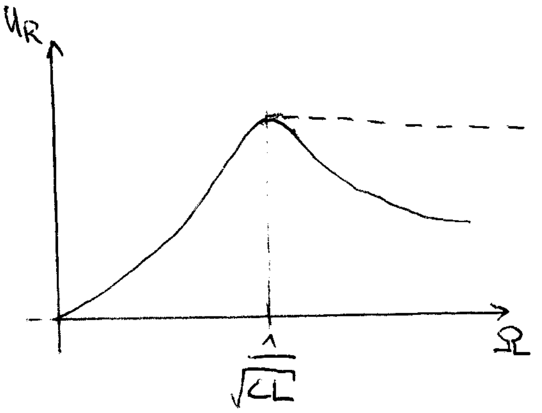
$$\overline{N}^t = \frac{u_{\sim,0}^2}{2|Z|}\cos\alpha$$

Strom und Leistung im Verbraucher

$$I_R = \frac{1/R}{1/R + \frac{i}{RL}} \cdot I = \frac{1/R \cdot u}{\left(1/R + \frac{i}{\Omega L}\right) Z}$$

$$= \frac{u}{R}\,\frac{1}{\frac{i}{\Omega C}\left(\frac{1}{R} + \frac{i}{\Omega L}\right) + 1} = \frac{U}{R\left(1 - \frac{1}{\Omega^2 CL}\right) + \frac{i}{\Omega C}}$$

$$U_R = R \cdot I_R = \frac{u}{1 - \frac{1}{\Omega^2 CL} + \frac{i}{\Omega RC}}$$



Wellenlösungen der vollen Maxwell-Gleichungen

μ, ε seien stückweise konstant

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$
$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \operatorname{rot} \vec{H} = \dot{\vec{D}} + \vec{j}$$
$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ Vektorpotential, $\vec{A}$ ist nur bestimmt bis auf ein $\operatorname{grad} \psi$

$$\operatorname{rot}(\vec{E} + \dot{\vec{A}}) = 0 \quad \leadsto \quad \vec{E} + \dot{\vec{A}} = -\operatorname{grad} \phi$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{A} = \mu\mu_0 (\dot{\vec{D}} + \vec{j})$$

rot rot = grad div − Δ

$$\overset{1)}{\Leftrightarrow} \quad \operatorname{grad}\operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \dot{\vec{E}} + \mu\mu_0 \vec{j}$$
$$= -\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 (\ddot{\vec{A}} + \operatorname{grad} \dot{\phi}) + \mu\mu_0 \vec{j}$$

$$\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \ddot{\vec{A}} - \Delta \vec{A} = -\operatorname{grad} \underbrace{(\operatorname{div} \vec{A} + \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \dot{\phi})}_{\overset{!}{=} 0 \text{ Eichbedingung}} + \mu\mu_0 \vec{j}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} + \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \dot{\phi} = 0} \quad \text{"Lorentz-Eichung"}$$

$$\boxed{\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \ddot{\vec{A}} - \Delta \vec{A} = \mu\mu_0 \vec{j}}$$

---

aus $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$:

$$-\varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{div}(\dot{\vec{A}} + \operatorname{grad} \phi) = \rho$$
$$\operatorname{div} \vec{A} = -\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \dot{\phi}$$
$$-\varepsilon\varepsilon_0 (\underbrace{\operatorname{div}\operatorname{grad}}_{\Delta} \phi) - \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \ddot{\phi} = \rho$$

$$\boxed{\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \ddot{\phi} - \Delta \phi = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}}$$

---

1) rot rot = grad div − Δ

$$\ddot{\vec{A}} - \frac{1}{\mu\varepsilon\mu_0\varepsilon_0}\Delta A = \mu\mu_0\,\vec{j} \quad (c'^2)$$

$$\ddot{\varphi} - \frac{1}{\mu\varepsilon\mu_0\varepsilon_0}\Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad (c'^2)$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

$$\vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \operatorname{grad}\varphi$$

$$\frac{1}{\mu\varepsilon\mu_0\varepsilon_0}\operatorname{div}\vec{A} + \dot{\varphi} = 0$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \qquad c' = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\mu\varepsilon}}$$

Im Vakuum: $(\mu = \varepsilon = 1;\ \rho = 0;\ \vec{j} = 0)$

$$\operatorname{rot}\ddot{\vec{A}} - c^2\operatorname{rot}\Delta\vec{A} = 0 \rightsquigarrow \ddot{\vec{B}} - c^2\Delta\vec{B} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dot{\vec{A}} + \operatorname{grad}\varphi\right) - \Delta\left(\dot{\vec{A}} + \operatorname{grad}\varphi\right) = 0 \rightsquigarrow \ddot{\vec{E}} - c^2\Delta\vec{E} = 0$$

<u>Spezialfall:</u> ψ als Stellvertreter von A_i, φ, E_i, B_i

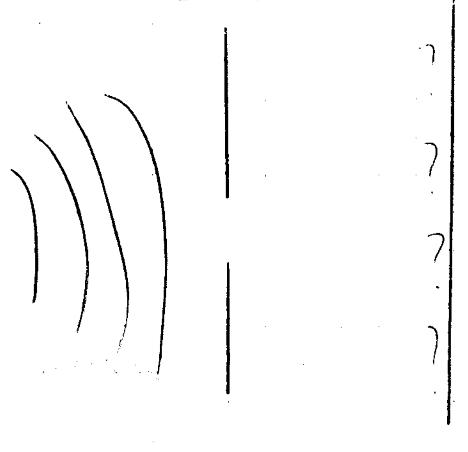
$$\ddot{\psi}(\vec{r},t) - c^2\Delta\psi(\vec{r},t) = 0$$

Ansatz: $\psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r})\cdot e^{-i\omega t}$

$$-\omega^2\psi - c^2\Delta\psi = 0$$

mit $k = \frac{\omega}{c}$ $\qquad \Delta\psi + k^2\psi = 0$

<u>Beugung</u>



Greenscher Integralsatz

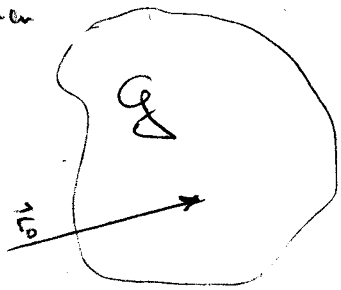
$$\vec{v} = u \cdot \text{grad}\,\psi - \psi \cdot \text{grad}\,u$$

$$\int_V \text{div}\,\vec{v} \cdot dV = \oint \vec{v}\,d\vec{f}$$

$$\text{div}\,\vec{v} = \text{grad}\,u \cdot \text{grad}\,\psi + u\,\Delta\psi - \text{grad}\,\psi\,\text{grad}\,u - \psi\Delta u$$

$$\int_V (u\,\Delta\psi - \psi\,\Delta u)\,dV = \oint (u\,\text{grad}\,\psi - \psi\,\text{grad}\,u)\,d\vec{f}$$

innen außen



ψ sei auf dem Rand von G bekannt, dann ist ψ auch in jedem inneren Punkt bekannt

u kann frei gesetzt werden

Vorschlag: $u(\vec{r}) = \dfrac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$

$$\boxed{\Delta u + k^2 u = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_0)}$$ „Greensche Funktion"

vgl. $\Delta\psi + k^2\psi = 0$

Beweis:

$R := |\vec{r} - \vec{r}_0|$

$u = \dfrac{e^{ikR}}{R}$ Gesucht ist $\Delta u = \Delta \dfrac{e^{ikR}-1}{R} + \underbrace{\Delta \dfrac{1}{R}}_{-4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_0)}$

$$\Delta \to \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial R} \Rightarrow \Delta\,\frac{e^{ikR}-1}{R} = -k^2 u$$

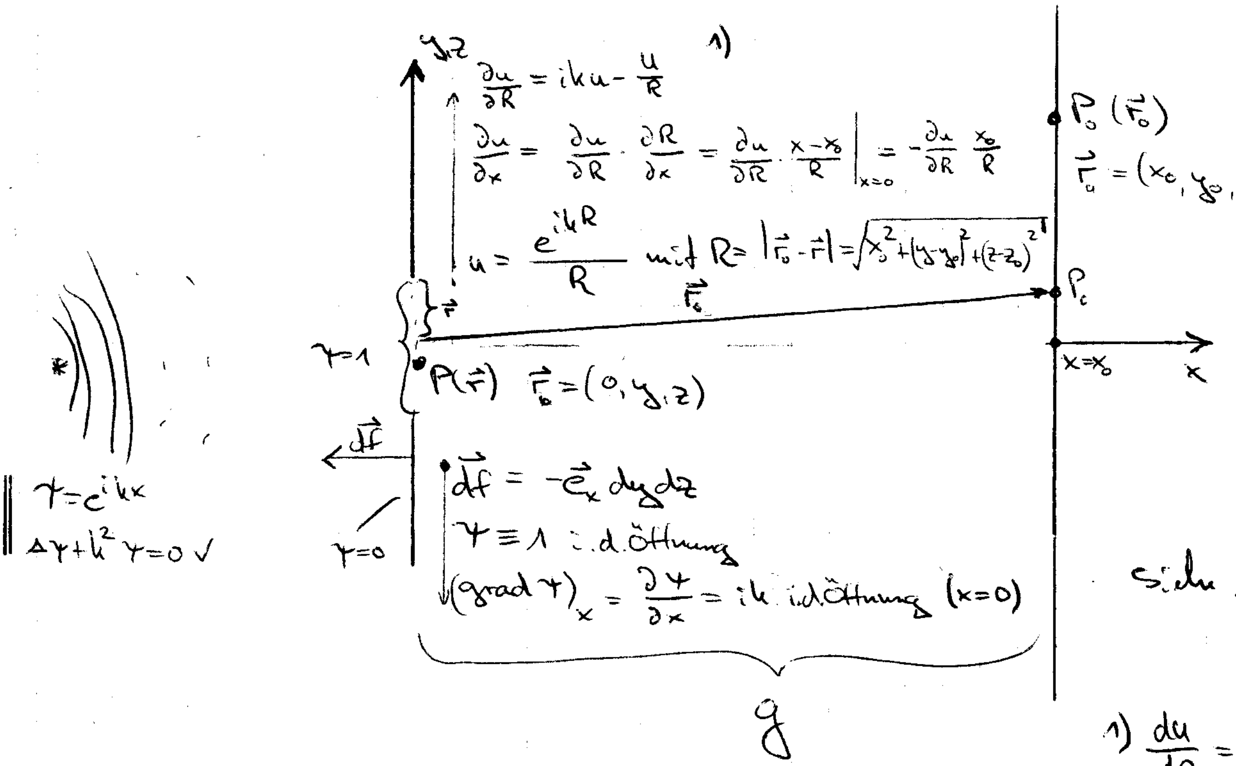
$$u\Delta\Psi - \Psi\Delta u = u(-k^2\Psi) - \Psi(-k^2u - 4\pi\,\delta^{(3)}(\vec r-\vec r_0))$$

$$= 4\pi\,\delta^{(3)}(\vec r-\vec r_0)\,\Psi(\vec r)$$

$$\int_V (u\Delta\Psi\Delta u)\,dV = 4\pi\int\delta^{(3)}(\vec r-\vec r_0)\,\Psi(\vec r)\,dV = 4\pi\,\Psi(\vec r_0)$$

$$\boxed{\Psi(\vec r_0) = \frac{1}{4\pi}\oint(u\,\mathrm{grad}\,\Psi - \Psi\,\mathrm{grad}\,u)\,d\vec f}$$

gibt Ψ im inneren an, wenn Ψ am Rand bekannt



1) $\frac{\partial u}{\partial R} = iku - \frac{u}{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial R}\cdot\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial R}\cdot\frac{x-x_0}{R}\Big|_{x=0} = -\frac{\partial u}{\partial R}\frac{x_0}{R}$$

$$u = \frac{e^{ikR}}{R} \quad \text{mit } R = |\vec r_0 - \vec r| = \sqrt{x_0^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

$P_0(\vec r_0)$ $\quad \vec r_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$P(\vec r)$ $\quad \vec r = (0, y, z)$

$\Psi = e^{ikx}$

$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0$ ✓

$$\underbrace{\begin{array}{l} d\vec f = -\vec e_x\,dy\,dz \\ \Psi\equiv 1 \text{ i.d. Öffnung} \\ (\mathrm{grad}\,\Psi)_x = \frac{\partial\Psi}{\partial x} = ik \text{ i.d. Öffnung } (x=0) \end{array}}_{g}$$

siehe Anmerkungen

1) $\frac{du}{dR} = -\frac{1}{R^2}e^{ikR} + \frac{1}{R}ik\,e^{ikR} = -\frac{u}{R} + iku$

$$\Psi(\vec r_0) = \frac{1}{4\pi}\int_{\text{Öffnungen}}(\ldots)\,d\vec f$$

<u>1. Näherung</u>: $x_0 \gg$ Dimension der Öffnung

($x_0\to\infty$) „Fraunhofer Beugung"

$R\to\infty$

$$\Psi(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{Öffnung}} \cancel{dx}dy\,\cancel{dx}dz\left\{\frac{e^{ikR}}{R}(-ik) - \frac{x_0}{R}ik\frac{e^{ikR}}{R}\right\}$$

$$= \frac{-ik}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{Öffnungen}} dz\,dy\,\frac{e^{ikR}}{R}\left(1+\frac{x_0}{R}\right)$$

2. Näherung

$$R = x_0 \sqrt{1 + \underbrace{\frac{(y-y_0)^2}{x_0^2} + \frac{(z-z_0)^2}{x_0^2}}_{\text{klein gegen } 1}} \overset{\text{Taylor}}{\approx} x_0 \left(1 + \frac{(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{2\, x_0^2}\right)$$

$$\Psi(x_0, y_0, z_0) = \ldots = -\frac{ik}{4\pi} \int_{\text{Öffnungen}} dy\,dz\, \frac{e^{ikx_0 + \frac{y^2+z^2-2yy_0-2zz_0+y_0^2z_0^2}{2x_0}}}{x_0(1+\ldots)}$$

3. Näherung

$y, z \ll x_0 \rightsquigarrow y^2, z^2$ gegen y, z vernachlässigen

Konstanten vor das Integral, im Nenner sei $R \simeq x_0$

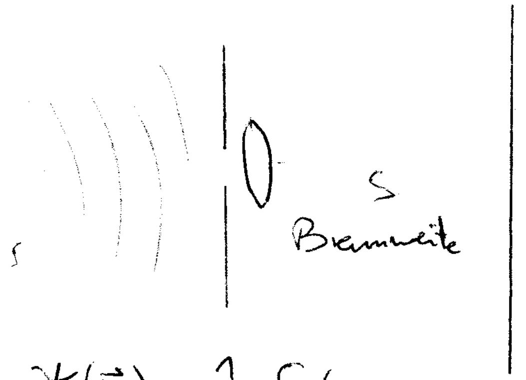
$$\ldots = -\frac{ik}{2\pi} e^{ik\alpha} \int_{\text{Öffnungen}} dy\,dz\; e^{-ik\left(y \cdot \frac{y_0}{x_0} + z \frac{z_0}{x_0}\right)}$$

$$\eta = \frac{y_0}{x_0} \qquad \varsigma = \frac{z_0}{x_0}$$

$$\Psi(\eta, \varsigma) \sim \int_{\text{Öffnungen}} dy\,dz\; e^{-ik(y \cdot \eta + z \cdot \varsigma)}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy\,dz\; M(y,z)\, e^{-iky\eta}\, e^{-ikz\varsigma} \qquad \text{vgl. Fourier-Int.}$$

Theo 10.1.05



$$\Psi(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \oint (u \operatorname{grad} \Psi - \Psi \operatorname{grad} u)\, d\vec{f}$$

Voraussetzung ist, dass Ψ Lsg von $\Delta\Psi + k^2\Psi = 0$

u = Greensche Funktion, gewählt, sodass

$$\Delta u + k^2 u = -4\pi\, \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$u = \frac{e^{ikR}}{R} \quad \text{mit } R = |\vec{r} - \vec{r}_0|$$

<u>einfallende Welle:</u> $\Psi = e^{ikx}$, Näherung $\frac{1}{R} \ll k = \frac{2\pi}{\lambda}$; $R \gg \lambda$

$$\Psi(x_0, y_0, z_0) \sim \int_{\text{Öffnung}} dy\,dz\, e^{ikR} \cdot \frac{1}{R}\left(1 + \frac{x_0}{R}\right) \qquad R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

$$R = \sqrt{R_0^2 + y^2 + z^2 - 2yy_0 - 2zz_0} = R_0 \sqrt{1 + \frac{y^2+z^2}{R_0^2} - \frac{2yy_0 + 2zz_0}{R_0^2}}$$

$$= R_0\left(1 + \frac{y^2+z^2}{2R_0^2} - \frac{yy_0 + zz_0}{R_0^2}\right) \quad \text{(nach Taylor)}$$

$$\Psi(x_0, y_0, z_0) \sim \cancel{\left(1 + \frac{x_0}{R_0}\right)} \frac{1}{R_0} \cdot e^{ikR_0} \int dy\,dz\, \frac{1}{(1+\dots)}\left(1 + \frac{x_0}{R_0(1+\dots)}\right) \cdot e^{ik\left(\frac{y^2+z^2}{2R_0} - y\eta + z\zeta\right)}$$

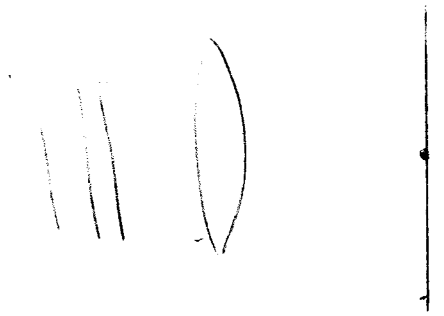
$$;\ \eta = \frac{y_0}{R_0},\ \zeta = \frac{z_0}{R_0}$$

$R_0 \gg d$ 2. Näherung

$$\Psi(x_0, y_0, z_0) \sim \int_{\text{Öff}} dy\,dz\, e^{ik\left(\frac{y^2+z^2}{2R_0} - y\eta - z\zeta\right)} \Rightarrow \text{Fresnel}$$

$$\sim \int dy\,dz\, e^{-ik(y\eta + z\zeta)} \Rightarrow \text{Fraunhofer}$$

Intensität $\sim |\psi|^2$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy\,dz\, e^{ik(\eta y+\zeta z)} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{ik\eta y}}_{2\pi\,\delta(k\eta)} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dz\, e^{ikz\zeta}}_{2\pi\,\delta(k\zeta)}$$

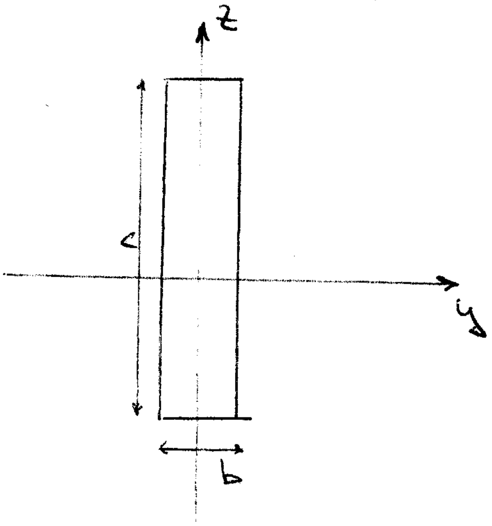
undurchsichtige Objekte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy\,dz \ldots - \underbrace{\int_{\text{Objekt}} dy\,dz\, e^{-ik(\eta y+\zeta z)}}$$

Babinet'sches Theorem

Beugungserscheinung ist gleich bis auf zentralen Punkt

Beispiel: Spalt

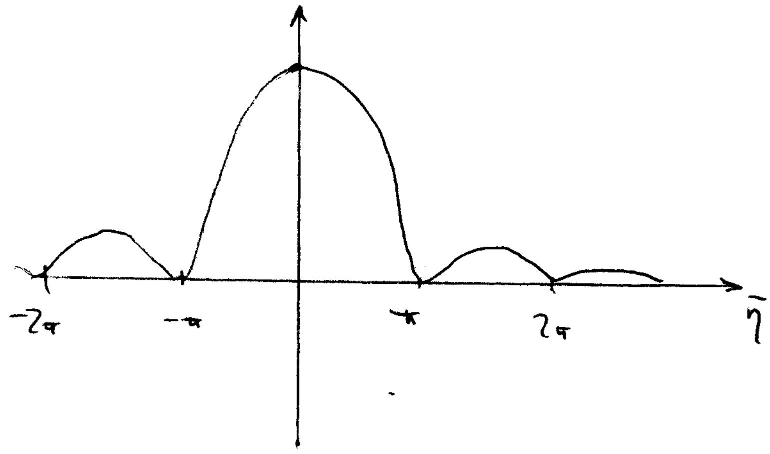


$$\psi \sim \int_{-b/2}^{b/2} dy\, e^{-ik\eta y} \cdot \int_{-c/2}^{c/2} dz\, e^{-ik\zeta z}$$

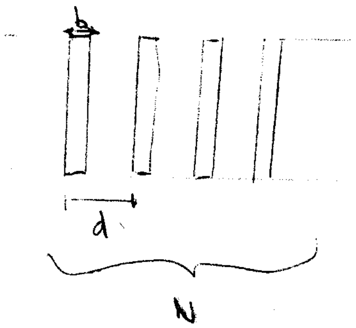
$$\psi = \left.\frac{e^{-ik\eta y}}{-ik\eta}\right|_{-b/2}^{+b/2} = \frac{\sin k\eta \frac{b}{2}}{\eta k \frac{b}{2}} \cdot \frac{\sin k\zeta \frac{c}{2}}{\zeta k \frac{c}{2}}$$

$$\psi^2 \sim \left(\frac{\sin\tilde{\eta}}{\tilde{\eta}}\right)^2 \left(\frac{\sin\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta}}\right)^2$$

Intensitätsverteilung:



Beispiel 2: Gitter



$$\psi \sim \sum_{n=1}^{N} \int_{b+nd}^{b+nd} dy\, e^{-ik\eta y} \quad \cancel{= \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-ik(b+nd)}}{ik\eta}}$$

subst $x = y - nd \qquad dx = dy$

$$\rightarrow \psi \sim \sum_{n=1}^{N} e^{-iknd\eta} \int_{0}^{b} dx\, e^{-ik\eta x} = \psi_{spalt} \cdot \sum_{n=1}^{N} e^{-inkd\eta}$$

$$I_{gitter} = I_{spalt} \cdot \underbrace{\left| \sum_{n=1}^{N} e^{-inkd\eta} \right|^2}_{\gamma}$$

geom. Reihe $\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{x^{N+1}-1}{x-1}$

$$\gamma = \left| \frac{e^{-ikdN\eta} - 1}{e^{-ikd\eta} - 1} \right|^2 = \frac{\sin^2 \frac{kNd\eta}{2}}{\sin^2 \frac{kd\eta}{2}}$$

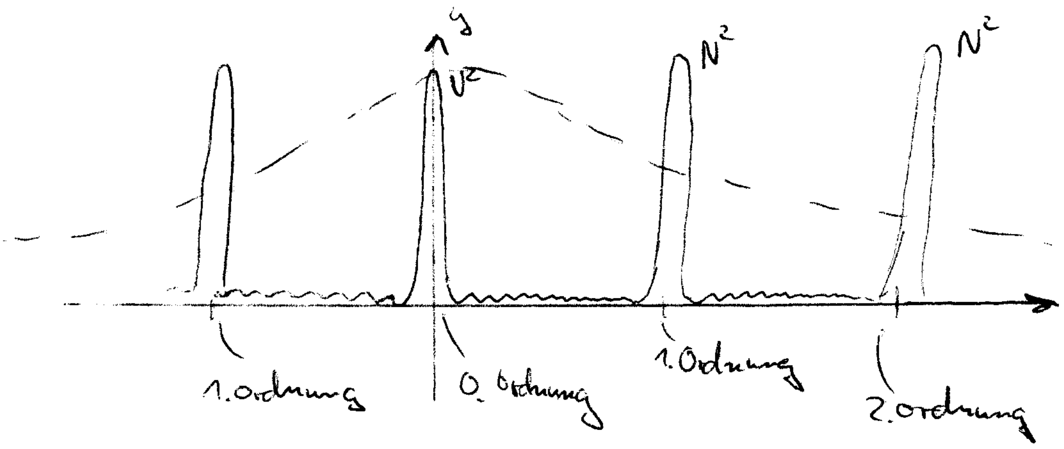
$$\eta \rightarrow \frac{2\pi m}{kd} + \varepsilon \quad , \quad \frac{kNd\eta}{2} \rightarrow \frac{2mN\pi}{kd} + N\varepsilon$$

$\cancel{\gamma \rightarrow}$

bzw. $\frac{kd}{2}\eta \rightarrow m\pi + \varepsilon$

$$\gamma \rightarrow \frac{\sin^2(mN\pi + N\varepsilon)}{\sin^2(m\pi + \varepsilon)} = \frac{\sin^2(N\varepsilon)}{\sin^2 \varepsilon} \rightarrow \frac{N^2 \varepsilon^2}{\varepsilon^2}$$

$$|e^{-i\alpha} - 1|^2 = (e^{-i\alpha} - 1)(e^{i\alpha} - 1) = 2 - e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2(1 - \cos\alpha) = 4\sin^2 \frac{\alpha}{2}$$



Statistisch verteilte Objekte (Löcher)

$$\Psi \sim \sum_{n=1}^{N} e^{ikd_n \eta} \cdot \Psi_{\text{Einzelobjekt}} \qquad I_{\text{stat}} = I_{\text{einzelobj.}} \cdot \mathcal{Y}_S$$

$$\mathcal{Y}_S = \left| \sum_{n=1}^{N} e^{-ikd_n \eta} \right|^2 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} e^{-ikd_n \eta} \cdot e^{ikd_m \eta}$$

$$= N + \underbrace{\sum_{\substack{n,m \\ n \neq m}} e^{ik\eta(d_m - d_n)}}_{\approx 0 \text{ wg. Stat. verteilung}}$$

$I_{\text{stat.}} = N \cdot I_{\text{Einzelobj}}$ $\Rightarrow$ Intensität wird nur verstärkt, aber selbes Bild wie nur ein Objekt/Loch

Theo 14.01.05

Polarisation

Maxwell - Gleichungen ohne Quellen

$$\vec\nabla \vec B = 0 \qquad \vec\nabla \times \vec E + \dot{\vec B} = 0$$

$$\vec\nabla \vec D = 0 \qquad \vec\nabla \times \vec H - \dot{\vec D} = 0$$

$e^{-i\omega t}$ Annahme — Herleitung Wellengleichung

$$\vec\nabla \times \vec E - i\omega \vec B = 0$$
$$\vec\nabla \times \vec B + i\omega \vec D = 0$$

$$\vec D = \varepsilon \vec E \ , \quad \vec B = \mu \vec H$$

$$\Rightarrow \quad \vec\nabla \times \vec E - i\omega \vec B = 0 \qquad \vec\nabla \times \vec B + i\omega\mu\varepsilon \vec E = 0 \quad (*)$$

$$\vec\nabla \times (\vec\nabla \times \vec B) + i\omega\mu\varepsilon \vec\nabla \times E = 0$$

$$\vec\nabla \times (\vec\nabla \times \vec B) - \mu\varepsilon\omega^2 \vec B = 0 \qquad \vec\nabla \times (\vec\nabla \times \vec B) = \vec\nabla(\vec\nabla \vec B) - \nabla^2 B = -\nabla^2 B$$

Helmholtzsche Wellengleichung

$$(\nabla^2 + \mu\varepsilon\omega^2)\vec B = 0$$
$$(\nabla^2 + \mu\varepsilon\omega^2)\vec E = 0$$

mögliche Lsg: $e^{ikx - i\omega t}$

$k = \sqrt{\mu\varepsilon}\ \omega$ Dispersionsrelation

$$e^{ikx - i\omega t} = e^{ik(x - vt)} \ ; \quad v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n}$$

v = Phasengeschwindigkeit $\qquad \lambda = \frac{2\pi}{k}$

$n = \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$ Brechungsindex

Grundlösung d. Wellengleichung

$$u(\vec x, t) = a e^{i\vec k\vec x - i\omega t} + b e^{-i\vec k\vec x - i\omega t}$$

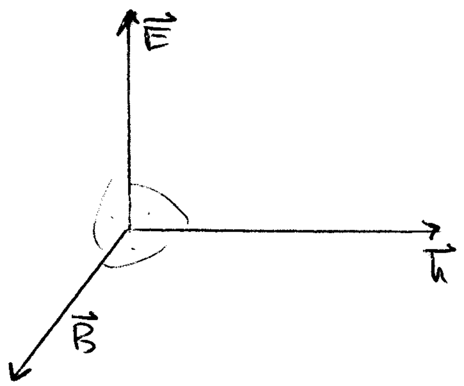
Wellenvektor $\vec k = k\vec n$

Forderung: Lsg möge Maxwell-Gl. genügen

$$\vec{E}(\vec{x},t) = E_0\, e^{i\vec{k}_1\vec{x} - i\omega_1 t}$$
$$\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{B}_0\, e^{i\vec{k}_2\vec{x} - i\omega_2 t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$
$$i(\vec{k}_1 \times \vec{E}_0)\, e^{i(\vec{k}_1\vec{x} - \omega_1 t)} = i\omega_2 B_0\, e^{i(\vec{k}_2\vec{x} - \omega_2 t)}$$
$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$
$$\vec{k}_1 = \vec{k}_2 = \vec{k} \qquad \vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad \vec{k}\,\vec{E}_0 = 0$$
$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \vec{k}\,\vec{B}_0 = 0$$



$\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k}$ bilden orthogonales Rechtssystem

$\to$ Transversale Welle

Sei $\vec{k}$ reell, dann können wir einen Satz von orthogonalen Vektoren $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$ einführen, so dass

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_1, \quad \vec{B}_0 = \vec{e}_2 \sqrt{\mu\varepsilon}\, E_0$$
oder $\vec{E}_0 = \vec{e}_2 \cdot E_0'$, $\quad \vec{B}_0 = -\vec{e}_1 \sqrt{\mu\varepsilon}\, E_0'$

E_0, E_0' i. allg. kompl. Größen sind.

Offensichtlich reicht $\vec{E}$ vollständig aus, um die gesamte elektromagnetische Welle zu beschreiben

Def.: Bei einer Welle der Art
$$\vec{E}_1 = \vec{e}_1 E_1\, e^{i\vec{k}x - i\omega t} \qquad \text{(oder 2. Möglichkeit)}$$
spricht man von einer linear polarisierten Welle

allg. Lsg.:

$$\vec{E}(\vec{x},t) = (\vec{e}_1 E_1 + \vec{e}_2 E_2) e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t}$$

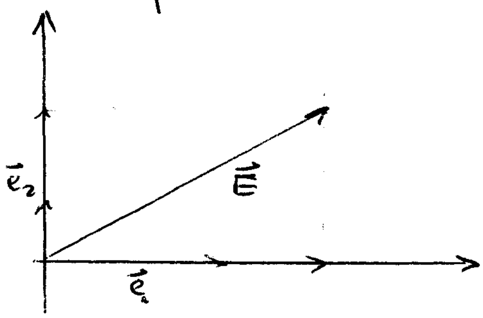
$$B_j = \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\vec{k} \times \vec{E}_j}{k} \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Ausbreitungsrichtung $\vec{k} = k\vec{n}$

$E_1 = |E_1| e^{i\varphi}$; $E_2 = |E_2| e^{i(\varphi+\delta)}$

$\delta = 0$ phasengleich $\Rightarrow$ linear polarisiert

$\delta \neq 0$ phasenverschieden $\Rightarrow$ elliptisch polarisiert



<u>Beispiel</u>: $\delta = \pm \pi/2 \qquad |E_1| = |E_2|$

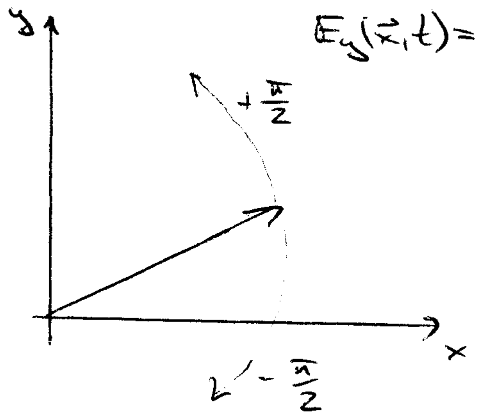
$$\vec{E}(\vec{x},t) = |E_2| (\vec{e}_1 \pm \vec{e}_2) e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t}$$

o.B.d.A. $\vec{k} = k\vec{e}_z$, $\vec{e}_1 = \vec{e}_x \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_y$

$Re(\vec{E}(\vec{x},t))$

$$E_x(\vec{x},t) = E_0 \cos(kz - \omega t)$$
$$E_y(\vec{x},t) = \mp E_0 \sin(kz - \omega t)$$

zirkular polarisiert



Reflexion und Brechung an der Trennfläche zweier Dielektrika

Übersicht:

(a) Einfallswinkel = Reflexionswinkel

(b) Einfallswinkel α und Brechungswinkel α'
Snellisches Brechungsgesetz

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{n'}{n}$$

kinematische Aussagen

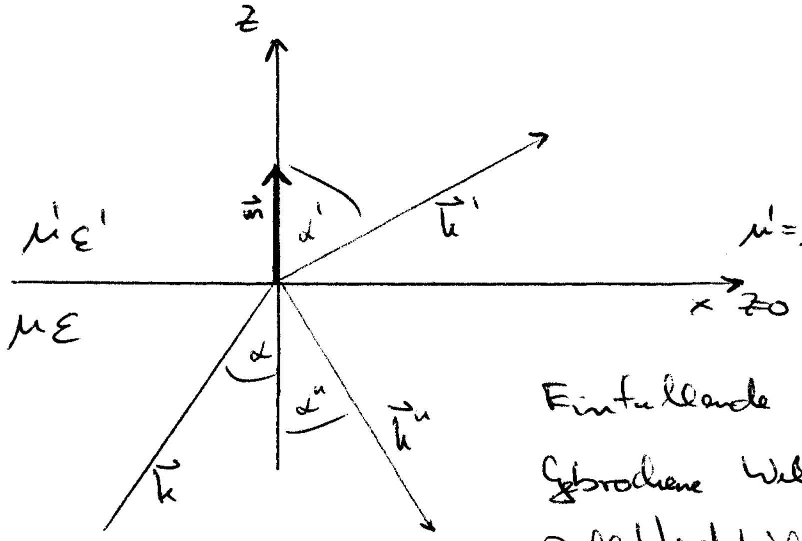
(c) Intensität des gebr. und refl. Strahl

[(d) Phasenänderung, Polarisation]

dynamische Aussagen

(a), (b) ergeben sich nur aus Wellennatur und Existenz von Grenzbed.

(c), (d) detaillierte Struktur wichtig



Einfallende Welle $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t}$

Gebrochene Welle $\vec{E}' = \vec{E}_0' e^{i\vec{k}'\vec{x} - i\omega' t}$

Reflektierte Welle $\vec{E}'' = \vec{E}_0'' e^{i\vec{k}''\vec{x} - i\omega'' t}$

An der Grenzfläche müssen Grenzbed. erfüllt sein, an jedem Ort zu jedem Zeitpunkt

Phasen können sich nur um Vielfache von π unterscheiden

$$(\vec{k}'\vec{x}-\omega' t)_{z=0} \overset{!}{=} (\vec{k}\vec{x}-\omega t)_{z=0} + n\pi \overset{!}{=} (\vec{k}''\vec{x}-\omega'' t)_{z=0} + m\pi$$

$$\omega = \omega' = \omega'' = \omega$$

$$m = n = 0$$

$$(\vec{k}'\vec{x})_{z=0} = (\vec{k}\vec{x})_{z=0} = (\vec{k}''\vec{x})_{z=0} \qquad \boxed{k \sin\alpha = k' \sin\alpha' = k'' \sin\alpha''}$$

~~(ergibt cos)~~

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon} \quad \text{mit } \mu = 1 \quad \Rightarrow |k'| = |k''| = k$$

$$\Rightarrow \text{(a)} \quad \alpha = \alpha''$$

$$\Rightarrow \text{(b)} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{n'}{n} = \frac{\sqrt{\varepsilon'}}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Grenzbedingungen:

Normalkomponente von $\vec{D}$, $\vec{B}$ stetig
Tangentialkomponente von $\vec{E}$, $\vec{H}$ stetig

$$[\varepsilon(\vec{E}_0 + \vec{E}_0'') - \varepsilon' \vec{E}_0'] \cdot \vec{n} = 0 \qquad (1)$$

$$[\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}_0'' - \vec{k}' \times \vec{E}_0'] \cdot \vec{n} = 0 \qquad (2)$$

$$(\vec{E}_0 + \vec{E}_0'' - \vec{E}_0') \times \vec{n} = 0 \qquad (3)$$

$$[\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}_0'' - \vec{k}' \times \vec{E}_0'] \times \vec{n} = 0 \qquad (4)$$

Fallunterscheidung (i) Polarisationsvektor $\perp \vec{k}$, $\vec{n}$

(ii) " $\parallel$ Einfallsebene

andere durch Lin.-Komb.

(i) aus (3) : $\left(E_0 + E_0'' - E_0'\right) = 0 \quad \Rightarrow E_0'' = E_0' - E_0$

aus (4) : $\sqrt{\varepsilon}\,(E_0 - E_0'')\cos\alpha - \sqrt{\varepsilon'}\,E_0'\cos\alpha' = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{\varepsilon}\,(2E_0 - E_0')\cos\alpha = \sqrt{\varepsilon'}\,E_0'\cos\alpha' \qquad n = \sqrt{\varepsilon},\ n' = \sqrt{\varepsilon'}$$

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2\sqrt{\varepsilon}\cos\alpha}{\sqrt{\varepsilon'}\cos\alpha' + \sqrt{\varepsilon}\cos\alpha}$$

$$n'\cos\alpha' = \sqrt{(n')^2 - (n')^2\sin^2\alpha'}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{E_0'}{E_0} &= \frac{2n\cos\alpha}{n\cos\alpha + \sqrt{(n')^2 - (n)^2\sin^2\alpha}} \\ \frac{E_0''}{E_0} &= \frac{n\cos\alpha - \sqrt{(n')^2 - (n)^2\sin^2\alpha}}{n\cos\alpha + \sqrt{(n')^2 - (n)^2\sin^2\alpha}} \end{aligned}}$$

Fresnellsche Formel für $\vec{E} \perp$ Einfallsebene

(ii) $\cos\alpha\,(E_0 - E_0'') - \cos\alpha'\,E_0' = 0$

$\sqrt{\varepsilon}\,(E_0 + E_0'') - \sqrt{\varepsilon'}\,E_0' = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{E_0'}{E} &= \frac{2nn'\cos\alpha}{(n')^2\cos\alpha + n\sqrt{(n')^2 - n^2\sin^2\alpha}} \\ \frac{E_0''}{E} &= \frac{(n')^2\cos\alpha - n\sqrt{(n')^2 - n^2\sin^2\alpha}}{+} \end{aligned}}$$

Fresnellsche Formel für $\vec{E} \parallel$ Einfallsebene

Senkrechter Einfall: $(\alpha = 0)$

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n}{n+n'}$$

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{n-n'}{n+n'}$$

Theo 11.01.05

Ebene Wellen

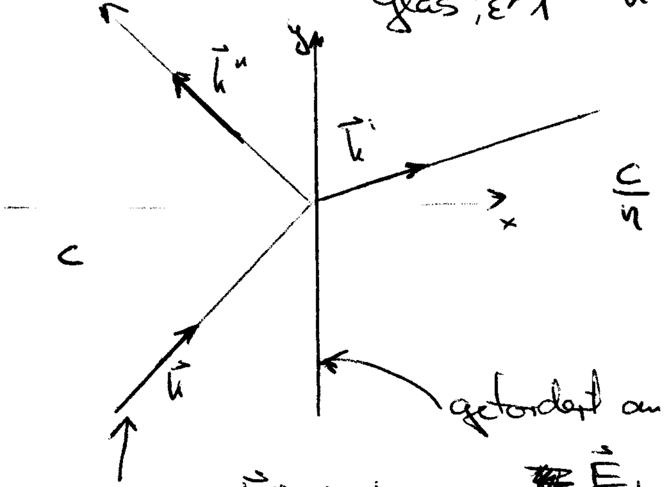
$\vec{E}, \vec{H}, \ldots \sim e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}$ $\qquad \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \, e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} \; ; \; E_0 = (1, i, 0)$

$\text{rot} \to i\vec{k} \times$ $\qquad \text{rot}\, \vec{E} = i\vec{k} \times E_0 e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} = i\vec{k} \times \vec{E}$

$\text{div} \to i\vec{k} \cdot$

$\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$

Glas; $\varepsilon > 1$ $\quad n = \sqrt{\varepsilon}$ $\quad$ für $\mu = 1$



$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}$

gefordert an der Grenzfläche:

$\underbrace{\vec{E}_{tg} \text{ stetig} \quad , \quad \vec{B} \text{ stetig}}$

i) für alle $t \leadsto \omega' = \omega'' = \omega$

ii) für alle $y \leadsto k'_y = k''_y = k_y$

$\frac{\omega}{k} = c = \frac{\omega''}{k''} \; ; \; \frac{\omega'}{k'} = \frac{c}{n} \qquad \text{mit } \omega'' = \omega' = \omega$

$\leadsto k'' = k \qquad k' = kn \qquad \text{mit } k'_y = k''_y = k_y$

$\leadsto k''_x = -k_x \quad \leadsto$ Einfallswinkel = Ausfallswinkel

$\leadsto k'_y = k_y \leadsto k' \cdot \sin \alpha' = k \cdot \sin \alpha$

$\leadsto \boxed{n \cdot \sin \alpha' = \sin \alpha}$

Pol. $\perp$ zur Einfallsebene

- $E + E'' = E'$

$$\dot{\vec{B}} = -\operatorname{rot} \vec{E}$$

$$-i\omega \vec{B} = -i \vec{k} \times \vec{E} \rightsquigarrow B = \frac{1}{c} E \ , \ B'' = \frac{1}{c} E''$$

- $(E - E'') \cos\alpha = n E' \cos\alpha'$

$\Rightarrow$

$$E'' = \frac{\cos\alpha - n\cos\alpha'}{n\cos\alpha' + \cos\alpha} E$$

$$E' = \frac{2\cos\alpha}{n\cos\alpha' + \cos\alpha} E$$

Pol. $\parallel$ zur Einfallsebene

$$E' = \frac{n\cos\alpha - \cos\alpha'}{n\cos\alpha + \cos\alpha'}$$

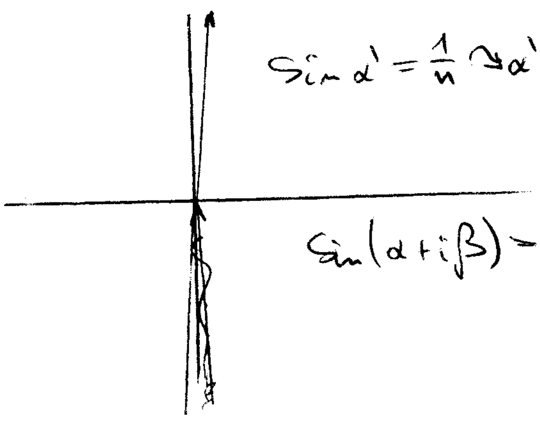
$$E' = \frac{2n\cos\alpha}{n\cos\alpha + \cos\alpha'} E$$

Totalreflexion

$n \cdot \sin\alpha' = \sin\alpha$

$n > 1$

falls $n \cdot \sin\alpha' > 1 \rightsquigarrow \alpha$ wird imaginär



$\sin\alpha' = \frac{1}{n} \rightsquigarrow \alpha' < \frac{\pi}{2}$

$$\sin(\alpha + i\beta) = \sin\alpha + \cosh\beta + i \underbrace{\cos\alpha}_{0} \sinh\beta > 1$$

Brewster Winkel:

$$E^{\parallel} \overset{?}{=} 0$$

$\perp$

$$\cos\alpha = n \cdot \cos\alpha'$$

$$\cos^2\alpha = n^2 \cdot (1 - \sin^2\alpha')$$

$$\cos^2\alpha = n^2 - \sin^2\alpha$$

$$1 = n^2$$

$\parallel$

$$n^2 \cos^2\alpha = \cos^2\alpha'$$

$$= 1 - \sin^2\alpha'$$

$$n^2 \cos^2\alpha = 1 - \frac{\sin^2\alpha}{n^2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} \qquad \sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$n^2 = 1 + \tan^2\alpha - \frac{\tan^2\alpha}{n^2} = 1 + \tan^2\alpha\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$n^2(n^2 - 1) = \tan^2\alpha\,(n^2 - 1)$$

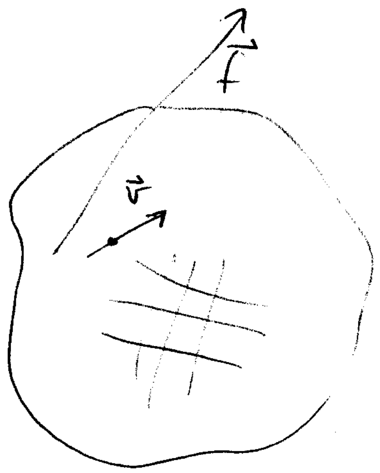
$$\Rightarrow \boxed{\tan\alpha_B = n}$$

Intensität

Erhaltungssatz $\dot{w}_{mech} + \operatorname{div} \vec{j}_w = 0$

Ziel: $\frac{\partial}{\partial t}\left(w_{el} + w_{mag}\right) + \operatorname{div} \vec{S} = 0$

? ? ?



$$\vec{f} = e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \quad \text{Lorentz-kraft}$$

$$\dot{w}_{mech} = \vec{f} \cdot \vec{v} = e\vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \left(\operatorname{rot}\vec{H} - \dot{\vec{D}}\right) \cdot \vec{E}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H}\end{array}\right\} \text{keine Materie}$$

$$\dot{\vec{D}} \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \dot{\vec{E}}\vec{E} = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\cdot\vec{E}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\cdot\vec{E})$$

$$\cancel{(\vec{\nabla}\times\vec{H})\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\times\vec{H}\cdot\vec{E} = \ldots}$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{H})\cdot\vec{E} = \varepsilon^{ijk}(\partial_j H_k)E_i = \varepsilon^{ijk}\partial_j(H_k E_i) - \varepsilon^{ijk} H_k \partial_j E_i$$

$$\cancel{= \varepsilon^{jki}\partial_j(H_k E_i} \qquad \partial_j \underbrace{(\varepsilon^{jki} H_k E_i)}_{(\vec{H}\times\vec{E})_j} = \varepsilon^{ijk}\partial_j(H_k E_i)$$

$$\varepsilon^{ijk} H_k \partial_j E_i = H_k \underbrace{\varepsilon^{kij}\partial_j E}_{-(\mathrm{rot}\,\vec{E})_k = \dot{B}_k}$$

$$= \mathrm{div}(\vec{H}\times\vec{E}) - \vec{H}\cdot\dot{\vec{B}}$$

$$w_{mech} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}) - \mathrm{div}\,(\vec{E}\times\vec{H})$$

im materiefreien Raum: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{D}\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}}{2}\right) + \mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{H}) = 0$

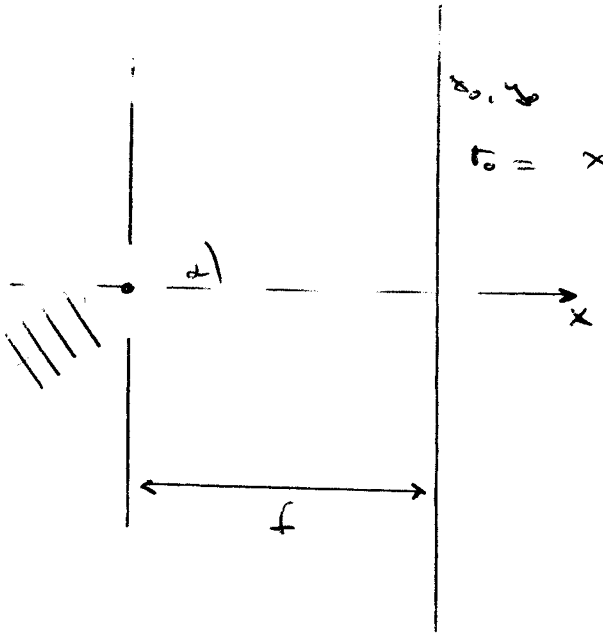
$\Rightarrow w_{el} = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} \qquad w_{mag} = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

Energiedichtestrom: $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$

in Materie: $\frac{\partial}{\partial t}(w_{mech} + w_{el} + w_{mag}) + \mathrm{div}\vec{S} + \mathrm{div}\, j_{mech} = 0$

Theo 21.1.05

Kommentar zur Beugung einer schrägen Welle



$r_0 = x_0^2 + y_0^2$

$y_0 \to \infty$

$x_0 \to f$

Fraunhofersche Bed. schon bei $x_0 = f$

Schräg einfallende Welle : $\psi = e^{ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}$

$$h = \frac{e^{ikR}}{R} \qquad R = \sqrt{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}$$

$$\psi(x_0, y_0) \sim \sim \int dy\, e^{ikR} \qquad R = \text{const} + y(\ldots)$$

durch y ausdrücken

$$\Rightarrow R = \text{const} + y(\underset{\overset{\downarrow}{0}}{a} + b\eta)$$

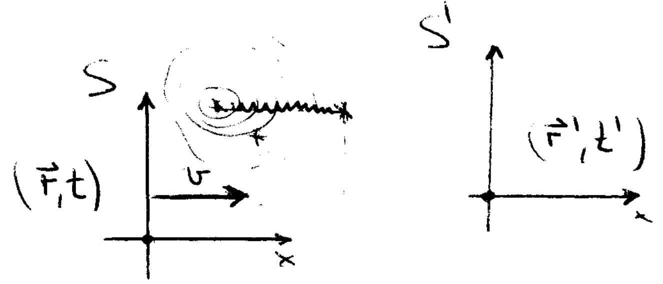
Poynting-Vektor

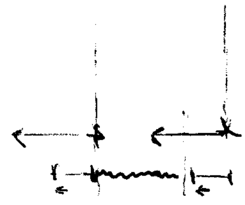
$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

ebene Welle $\overline{S}^t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E_0^2$

Spezielle Relativitätstheorie

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$





Lorentz-Transformation

$\vec{r}' = \vec{r}'(\vec{r}, t)$

$t' = t'(\vec{r}, t)$

vgl. Galilei

$t' = t$

$y' = y$

$z' = z$

$x' = x - vt$

Einfachster Fall: lin. Transf.

Wenn $t=0$, dann sei $t'=0$
und dann sollen auch die Koordinaten-
ursprünge zusammenfallen

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ allgem. lin. Transformation

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:

Im System S seien $\vec{r}$ der Abstand eines Punktes P vom Ursprung und t die Zeit der Beobachtung (unsere Beobachtungszeit von P)
$\Rightarrow (\vec{r}, t)$ ist ein "Ereignis"

z.: Lichtsignal, das zur Zeit $t=0$ den Ursprung verlassen hat, kommt in P an

$\curvearrowright ct = |\vec{r}| \sim \boxed{c^2 t^2 - \vec{r}^2 = 0}$

Dasselbe aus der Sicht von S':

$$c^2 t'^2 - \vec{r}'^2 = 0$$

Jede Transformation von $(\vec{r}, t)$ in $(\vec{r}', t')$ mit der Eigenschaft

$$c^2 t^2 - \vec{r}^2 = 0 \Leftrightarrow c^2 t'^2 - \vec{r}'^2 = 0$$

ist eine Lorentz Transformation

<u>Minkowsky-Raum</u>

4-dimensionale Vektoren: (Ereignis, Ortsvektoren)

$\mu = 0,1,2,3$

$$x^\mu = (\underset{\uparrow\atop x^0}{ct}, x^1, x^2, x^3) \quad \text{bzw. systematisch } x^\mu = (\underset{\uparrow\atop ct}{x^0}, x^1, x^2, x^3)$$

Skalarprodukt: $x \cdot y := x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$

Summenkonvention

Metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$x_i \cdot x^i = \vec{r}^2$ — Unterschied lat zu griechischen Indizes

$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -x, -y, -z)$ kovariant

vgl $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ kontravariant

$$x^\mu = (g_{\mu\nu})^{-1} x_\nu \qquad g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \qquad g_{\mu\nu} g^{\nu\kappa} = g_\mu^\kappa = \delta_{\mu\kappa} = \text{Einheitsmatrix}$$

$x \cdot y = x_\mu y^\mu = x^\mu y_\mu$

kovariante Schreibweise des provisorischen $\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Lorentztransformation = lineare Transf. im Minkowsky-Raum mit der Eigenschaft $c^2t^2 - \vec{r}^2 = 0 \Leftrightarrow c^2t'^2 - \vec{r}'^2 = 0$

$x^\mu = (ct, \vec{r})$: $x^\mu x_\mu = 0 \Leftrightarrow x'^\mu x'_\mu = 0$

Viererlänge

Umschreibung $c^2t'^2 - \vec{r}'^2 = x^\mu \cdot x_\mu$

$$\boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu}$$

$x'^\mu x'_\mu = P_2(x^0, x^1, x^2, x^3)$, Polynom 2. Grades

$x'^\mu x'_\nu = P_2 = 0 \Leftrightarrow x^\mu x_\mu = 0$ beide Polynome stimmen in allen Nullstellen überein

$\Rightarrow$ Pol. können sich nur um Konstante untersch.

Unter LT. muss gelten,

$x'^\mu \cdot x'_\mu = \lambda x^\mu x_\mu \quad \rightsquigarrow \lambda = 1$ (heißt: In beiden Systemen mit gleichen Maßen messen)

$\Rightarrow$ Viererlänge~~länge~~ ist invariant unter LTen

$\rightsquigarrow x^\mu y_\mu$ ist invariant unter LTen

Lorentztransformation ist Dreh-Spiegelung im Mink.-Raum

$$g_{\mu\nu} x'^\mu y'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha \Lambda^\nu{}_\beta x^\beta \overset{!}{=} g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$$

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta x^\alpha y^\beta \overset{!}{=} g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \qquad \forall x^\alpha y^\beta$$

} Summenkonvention

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$$

$$\overbrace{\Lambda^{T\mu}{}_{\alpha}\, g_{\mu\nu}\, \Lambda^{\nu}{}_{\beta}}^{\to \text{ gewöhnliche Matrizenmult.}} = g_{\alpha\beta}$$

$$\Lambda^T g \Lambda = g \qquad \text{vgl. im } \mathbb{R}^3 : R^T R = I$$

z.B.:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{spiegelt die Zeitachse}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Spiegelt die } x\text{-Achse}$$

...

eigentliche LT bzw. eigentliche, orthochrone LTen sind solche, die kontinuierlich mit $\Lambda = I$ zusammenhängen, d.h. keine Spiegelungen

Jedes R ist ein Λ (jede gewöhnliche Drehung im Raum ist auch eine Lorentztransf.)

$$x \cdot y = x^0 \cdot y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \to x^0 y^0 - (\overrightarrow{Rx})(\overrightarrow{Ry}) \quad \text{invariant}$$

Aussicht: Boost = LT ohne Drehung

LT bilden eine Gruppe

Tho 24.1.05

$x^\mu = (ct, x, y, z)$; $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$

$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \rightsquigarrow x \cdot x$ (= Vierlänge)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu} \qquad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \; ; \; x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

LT: $x \cdot x$ ist invariant ; Rotationen im $\mathbb{R}^{(3)}$ sind LT

$\Lambda^\mu{}_\nu$: $\Lambda^T g \Lambda = g$ ist Bed. für LT vgl.: $R^T R = I$

"Boost" in x-Richtung : rotationsfreie LT

Konvention: $x_\nu = g_{\mu\nu} x^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\mu$

Boost: Wechsel von ruhendem in bewegtes Bezugssystem

$$B(v) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ als Ansatz für $x' = B \cdot x$

$B(v)$ soll LT sein $\Rightarrow$ Gleichung $\Lambda^T g \Lambda = g$ muss erfüllt werden

$$B^T g B = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \alpha & -\gamma \\ \beta & -\delta \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 - \gamma^2 & \alpha\beta - \gamma\delta \\ \alpha\beta - \gamma\delta & \beta^2 - \delta^2 \end{pmatrix}$$

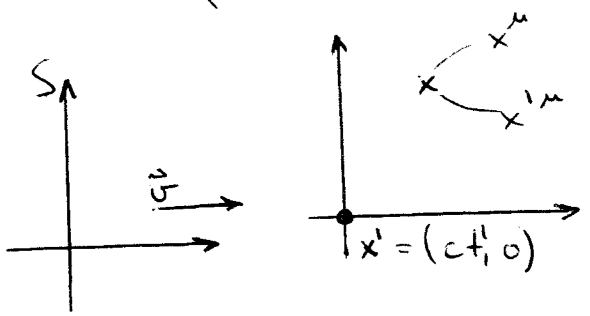
$\Rightarrow$
$\alpha^2 - \gamma^2 = 1$
$\delta^2 - \beta^2 = 1$
$\alpha\beta - \gamma\delta = 0$

Gleichungssystem
Boost soll orthochron sein: $\alpha > 0$
" " eigtl. " : $\delta > 0$

Lösungsansatz:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \cosh\vartheta \\ \gamma &= \sinh\vartheta \\ \delta &= \cosh\vartheta' \\ \beta &= \sinh\vartheta' \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \cosh\vartheta \sin\vartheta' - \cos\vartheta' \sinh\vartheta \\ 0 &= \sinh(\vartheta' - \vartheta) \\ &\rightsquigarrow \vartheta' = \vartheta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} \cosh\vartheta & \sinh\vartheta \\ \sinh\vartheta & \cosh\vartheta \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} x' &= Bx \\ x'^0 &= x^0 \cosh\vartheta + x^1 \sinh\vartheta \quad = ct' \\ x'^1 &= x^1 \cosh\vartheta + x^0 \sinh\vartheta \quad = 0 \end{aligned}$$

$$? \quad \left.\begin{aligned} -x^1 &= ct' \sinh\vartheta = x \\ x^0 &= +ct' \cosh\vartheta = ct \end{aligned}\right\} \quad v = \frac{x}{t} = -c \tanh\vartheta$$

$$\Rightarrow \tanh\vartheta = -\frac{v}{c}$$

$$\cosh\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2\vartheta'}}$$

$$B(v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & -\frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ -\frac{v/c}{\sqrt{}} & \frac{1}{\sqrt{}} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow x' = Bx$$

wenn sich S' mit v bewegt

Zeitdilation

$$\text{tick}' = (0, \vec{0}) \qquad \text{tack}' = (c \cdot \Delta t', 0)$$

$$\text{tick} = (0, 0) \qquad \text{tack} = \Delta t' \left(\frac{c}{\sqrt{}}, \frac{v}{\sqrt{}} \right)$$

$$c\Delta t = \frac{c\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightsquigarrow \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 + \left(-\frac{v^2}{c^2}\right)}} \rightsquigarrow \Delta t' = \underbrace{\Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Eigenzeit der ruhenden Uhr, bezeichnet mit τ: $\Delta\tau = \Delta t \sqrt{}$

Die Eigenzeit ist Lorentzinvariant

Betrachtung der Geschwindigkeit

$\cancel{\dfrac{dx^\mu}{dt}}$ Einführung der Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{(c, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{(c, \vec{u})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};$$

$$u^\mu \cdot u_\mu = \frac{c^2 - u^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} = c^2 \quad \Big| \quad \checkmark \text{ invariante Viererlänge}$$

Viererimpuls

$$p^\mu = m u^\mu \qquad m: \text{ invariante Ruhemasse}$$

$$= \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \vec{p}\right) \quad \text{mit } \vec{p} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$\Rightarrow$ praktisch wird oft mit der relat Masse gerechnet

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2$$

$$\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \to mc + \underbrace{\frac{1}{c}\left(\frac{m}{2}u^2\right)}_{\text{Energie?}} + \dots \Rightarrow \frac{mc^2 + E_{kin} + \text{rel Korrekturen}}{c}$$

$$E \xrightarrow{u \to 0} mc^2$$

...

Thu 28.1.05

x^μ, Eigenzeit $d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ invariant ; $x^\mu = (ct, \vec{r})$

$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$; $p^\mu = m u^\mu$; $u^\mu u_\mu = c^2$; $p^\mu p_\mu = m^2c^2$

$$p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx^\mu}{dt}(c,\vec{v}) = \left(\frac{mc}{\sqrt{\ }}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{\ }}\right) ; \vec{p} = \frac{m}{\sqrt{\ }}\cdot\vec{v}$$

$$\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\dots\right)$$

$$= mc + \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \text{rel. Korrekturen}$$

$$= \frac{1}{c}\left(mc^2 + E_{kin}^{(n.r)} + \text{rel. Korr.}\right)$$

$\Downarrow$

Ruhemasse

$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$; $p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2$

$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$ $\quad (E = m\cdot c^2)$

$m \to 0 \leadsto \frac{E^2}{c^2} = p^2 \leadsto E = cp$

$p^\mu = (p, p, 0, 0)$ Viererimpuls eines masselosen Teilchens

$\rightarrow$ Geschwindigkeit ergibt sich dann als c:

E, p gegeben, was ist v?

$$\frac{E}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow 1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{m^2c^4}{E^2} \Leftrightarrow v^2 = c^2 - \frac{m^2c^6}{E^2}$$

$\longrightarrow c^2$ für $m \to 0$

Beispiel: Photonen mit Vierervektor $\left(\frac{h\nu}{c}, \vec{p}\right)$

relativistische Ausdrücke für Kräfte ?

insb. Schwerkraft $\rightarrow$ allg. Relativitätstheorie

elektrische, magnetische Felder ? $\longrightarrow$ . . .

Erhaltungssätze beim Teilchenzerfall

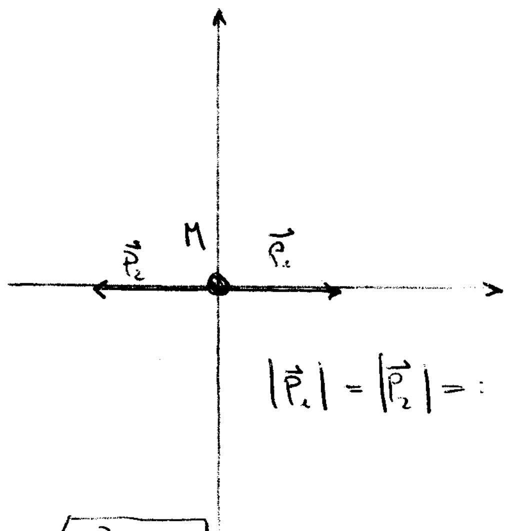
$M \to m_1 + m_2$; $m_1 + m_2 < M$

im Ruhesystem von M:

$$p^\mu = (Mc, \vec{0})$$

$$p^\mu_{i=1,2} = \left(\frac{E_i}{c}, \vec{p}_i\right)$$

$$\boxed{p^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu} \rightsquigarrow \vec{p}_1 = -p_2$$



$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| =: p$$

$$Mc = \frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c} = \sqrt{m_1^2 c^2 + p^2} + \sqrt{m_2^2 c^2 + p^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(Mc - \sqrt{m_2 c^2 + p^2}\right)^2 = m_1^2 c^2 + p^2$$

$$\Leftrightarrow M^2 c^2 - 2Mc\sqrt{m_2^2 c^2 + p^2} + m_2^2 c^2 + p^2 = m_1^2 c^2 + p^2$$

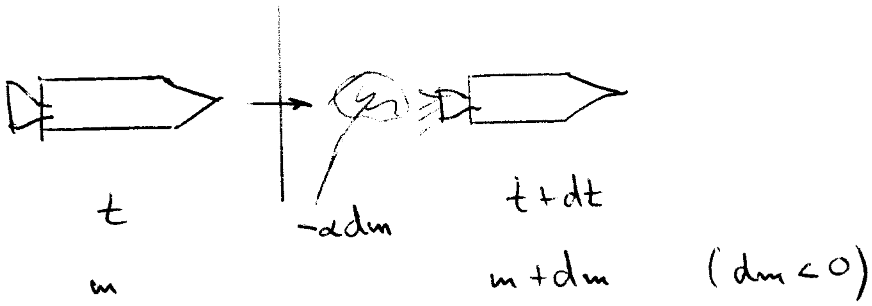
$$\Leftrightarrow p = \sqrt{c^2 \frac{(M^2 + m_2^2 + m_1^2)^2 - 4M^2 m_2^2}{4M^2}}$$

Symmetric ?

$$= \sqrt{c^2 \frac{(M^2 - m_1^2 - m_2^2) - 4m_1^2 m_2^2}{4M^2}}$$

✓

Rakete



$0 \leq \alpha < 1$

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p\right) = p^\mu + dp^\mu + q^\mu = \left(\frac{E+dE}{c}, p+dp\right) + \left(\frac{q_0}{c}, -dp\right)$$

$$E = c\sqrt{m^2c^2+p^2} \qquad q_0 = c\sqrt{c^2\alpha^2 dm^2 + dp^2}$$

$$\frac{dE}{c} = -\cancel{4}\sqrt{c^2\alpha^2 dm^2 + dp^2}$$

$$dE = \frac{c(c^2 m\,dm + p\,dp)}{\sqrt{m^2c^2+p^2}}$$

nach $df = f_x\,dx + f_y\,dy$ für $f(x,y)$

$$= -c\sqrt{c^2\alpha^2 dm^2 + dp^2}$$

$$c^4 m^2 dm^2 + 2c^2 m p\,dm\,dp + p^2 dp^2 = (c^2\alpha^2 dm^2 + dp^2)(m^2c^2+p^2)$$

$$= m^2c^4\alpha^2 dm^2 + m^2c^2 dp^2 + p^2c^2\alpha^2 dm^2 + p^2 dp^2$$

$$dm^2\left(c^2m^2(1-\alpha^2) - \alpha^2p^2\right) + \underbrace{2mp\,dm\,dp - m^2dp^2}_{p^2dm^2 - (p\,dm - m\,dp)^2} = 0$$

quad. Erg.

$$\Leftrightarrow \left[c^2m^2(1-\alpha^2) + (1-\alpha^2)p^2\right] dm^2 = (p\,dm - m\,dp)^2 \quad ; \beta := \sqrt{1-\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow \beta\sqrt{m^2c^2+p^2}\,dm = \pm(p\,dm - m\,dp) \qquad \left| p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow v^2 = \frac{p^2}{m^2+\frac{p^2}{c^2}}\right)$$

$$dp = \frac{m v \, dm}{\sqrt{\;\;}} + \frac{m \, dv}{\sqrt{\;\;}^{3}}$$

$$c\beta \frac{p}{v} dm = \pm \left(p \, dm - \underbrace{\frac{m v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}_{p} dm + \frac{m^2 dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^{3}} \right)$$

$$\Leftrightarrow c\beta \, dm = \pm \frac{m^2 v}{p \sqrt{\;\;}^{3}} dv$$

$$= \pm \frac{m}{1-\frac{v^2}{c^2}} dv$$

dv ist pos, dm ist neg. im Prozess

$$c\beta \, dm = - \frac{m \, dv}{1 - v^2/c^2}$$

$$c\beta \log m = c \cdot \log \frac{c-v}{c+v} \quad (?)$$

$$v = \frac{c\left(m_0^{2\beta} - m^{2\beta}\right)}{m_0^{2\beta} + m^{2\beta}}$$

Theo 4.2.05

$j^\mu = (\rho c, \vec{j}) \qquad j'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, j^\nu$

$\vec{E}, \vec{B}, \vec{A}$?

$\vec{A} \to A^\mu = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right)$

$\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} - \cancel{} \Delta A = \mu_0 \vec{j}$

$\frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} - \cancel{} \Delta \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\underbrace{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)}_{\Box} = \left(\sum_{\mu=0}^{3} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{x^\nu}\right)$ zz.: $\Box$ ist Lorentzinvariant

$\Rightarrow$

$\Box \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$

$\Box \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \Rightarrow \quad x^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \, x'^\mu$

$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{x^\mu} \qquad \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$

$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\Lambda^{-1T})_\alpha{}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = (\Lambda^{-1T})_\alpha{}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}}$ Transformation des Gradienten (Nabla) kovariant

---

$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu \, dx^\nu$ Transformation des Differenzials kontravariant

---

$\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \qquad \partial^\mu \partial_\mu = g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \partial_\mu \partial_\nu = \Box$

$$\Box \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad ; \quad j^\mu = (\rho c \; \vec{j})$$

$$\Box \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \mu_0 \cdot \frac{\rho c}{\mu_0 \varepsilon_0 \cdot c} = c \, \mu_0 \cdot \rho \cdot c$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varphi}{c} = \mu_0 \rho \cdot c$$

$$\Rightarrow \boxed{\Box A^\mu = \mu_0 j^\mu} \qquad A^0 = \frac{\varphi}{c}$$

Invarianz der Eichbedingung?

Eichbed. (Lorentz-Eichung): $c^2 \operatorname{div} \vec{A} + \dot{\varphi} = 0$

$$c^2 \partial_i A^i + c^2 \partial_0 A^0 = 0$$

$$c^2 \partial_\mu A^\mu = 0$$

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0}$$

$F^{\mu\nu}$ = "elektr. Feldtensor" $:= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_x$$

mit $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^1} = \partial_1 = -\partial^1$

$$F^{01} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_x + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x} \varphi = -\frac{E_x}{c}$$

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\frac{\partial}{\partial x} A_y + \frac{\partial}{\partial y} A_x = -(\operatorname{rot} A)_z$$
$$= -B_z$$

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = e\left[\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right]$$ Transformieren beide Seiten gleich?

raten:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = e F^{\mu\nu} u_\nu \quad ?$$ Überprüfung für kleine Geschwindigkeiten

$$\frac{d\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)}{\cancel{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot dt} = e\left(F^{10}u_0 + F^{1i}u_i\,,\ F^{20}_{\cdots}\,,\ F^{30}_{\cdots}\right)$$

$$= e\left(\frac{E_x}{\cancel{c}}\cdot\frac{c}{\cancel{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} + \frac{+B_z\cdot v_y - B_y v_z}{\cancel{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}\,,\ \dots\,,\ \dots\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = e\left(E_x + (v\times B)_x\,,\ \dots\,,\ \dots\right) = e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Nullte Komponente ergibt den Energieerhaltungssatz: ✓

$$\frac{d\,\frac{\mathcal{E}}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ dt} = e\,\frac{\vec{E}\cdot\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightsquigarrow \frac{du}{dt} = e\vec{E}\cdot\vec{v}$$

$S \qquad S' \xrightarrow[v_x]{}$ Transformation der Felder

$$x' = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\ }} & \frac{-v/c}{\sqrt{\ }} & 0 & 0 \\ \frac{-v/c}{\sqrt{\ }} & \frac{1}{\sqrt{\ }} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda^\mu{}_\nu}$$ Boost in x-Richtung

$$-\frac{E_x'}{c} = F'^{01} = \cancel{\Lambda^{0}{}_{0,1}\,\Lambda^{1}{}_{0,1}} = \Lambda^{0}{}_{\alpha}\,\Lambda^{1}{}_{\beta}\,F^{\alpha\beta}$$

$$= \Lambda^{0}{}_{0}\,\Lambda^{1}{}_{1}\,F^{01} + \Lambda^{0}{}_{1}\,\Lambda^{1}{}_{0}\,F^{10} \qquad \Big|\ \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \left(-\gamma + \gamma^2\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{E_x}{c} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{E_x' = E_x \cdot \gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = E_x}$$

$\Rightarrow$ x-Komponente ändert sich nicht. y-Komponente?

$$-\frac{E_y'}{c} = F'^{02} = \Lambda^{0}{}_{\alpha}\,\Lambda^{2}{}_{\beta}\,F^{\alpha\beta} = \Lambda^{0}{}_{0}\,F^{02} + \Lambda^{0}{}_{1}\,F^{12}$$

$$= -\gamma\frac{E_y}{c} + \frac{v}{c}\gamma B_z$$

$$\boxed{E_y' = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

analog:

$$\boxed{E_z' = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

Transformation des Magnetfelds

$$B_x' = -F'^{23} = -\Lambda^{2}{}_{\alpha}\,\Lambda^{3}{}_{\beta}\,F^{\alpha\beta} = -F^{23} = B_x$$

$$B_y' = F'^{13} = \Lambda^{1}{}_{\alpha}\,\Lambda^{3}{}_{\beta}\,F^{\alpha\beta} = \Lambda^{1}{}_{0}\,F^{03} + \Lambda^{1}{}_{1}\,F^{13}$$

$$= +\frac{v}{c}\gamma\frac{E_z}{c} + \gamma B_y$$

$$= \frac{B_y + \frac{v}{c^2}E_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$B_z' = \frac{B_z - \frac{v}{c^2}E_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Bemerkung:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = +2\left(\frac{-E^2}{c^2} + B^2\right) \quad \text{ist invariant}$$

d.h.

$$E^2 - c^2 B^2 = \text{invariant unter L.T.}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k$$

Levi - Civitá $\longrightarrow$ in vier Dimensionen

$\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}$; $\varepsilon_{0123} = 1$, total antisymmetrisch

$$\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} F^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda} \sim \vec{E} \cdot \vec{B}$$

Theo 7. 1.05

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \qquad \text{mit} \quad \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots\right)$$

$$A^\mu = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right)$$

Eichbed.:

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right)$$

$$= \Box A^\nu = \mu_0 j^\nu$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu}$$ Schreibweise der Maxwell-Gl.

$$\Leftrightarrow \left\{ \operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \operatorname{rot} \vec{H} - \dot{\vec{D}} = j \right\}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad ; \quad \varepsilon^{0123} = 1, \text{ total antisymmetrisch}$$

$$\Rightarrow \varepsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} = \underbrace{\Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \Lambda^\gamma{}_\kappa \Lambda^\delta{}_\rho \varepsilon^{\mu\nu\kappa\rho}}_{\pm \det \Lambda}$$

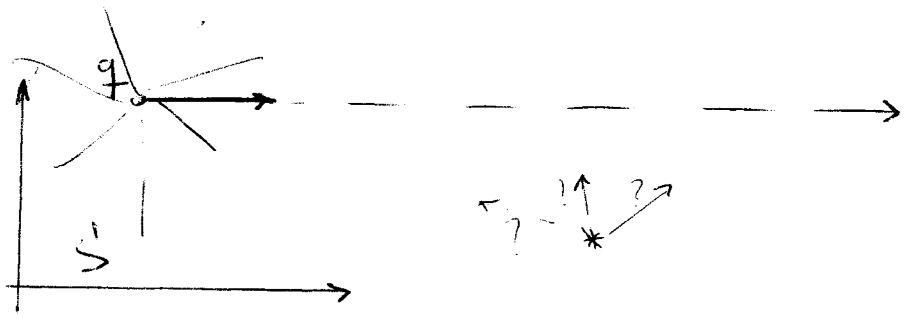
$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad ; \quad \{R^T \cdot R = I\}$$

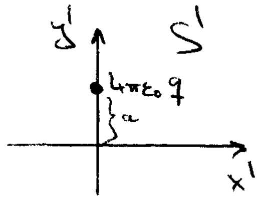
$$\Leftrightarrow \det \Lambda^T \cancel{\det g} \det \Lambda = \cancel{\det g} \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1 \quad ; \begin{array}{l} -1 \text{ Spiegelungen} \\ +1 \text{ LT} \end{array}$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} := \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = (B \leftrightarrow E)$$ duale Feldtensor)

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \ \operatorname{rot} \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \right\}$$

$$\partial_\mu F^\mu{}_\kappa F^{\kappa\nu} = \mu_0 F^{\kappa\nu} j_\kappa$$





$$\phi' = \frac{1}{r'} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + (y'-a)^2}}$$

Viererpotential: $A'^{\mu} = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{0}\right)$

$$A^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & v/c & 0 \\ v/c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \end{pmatrix} \cdot A'^{\mu}$$

$$= \left(\frac{\phi}{c}\gamma, \frac{v}{c^2}\phi'\gamma, 0, 0 \right)$$

$$x^{\mu} = \gamma \left(\ldots \right) \cdot \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \left(\gamma\left(ct' + \frac{v}{c}x'\right), \gamma\left(vt' + x'\right), y', 0 \right)$$

$$\phi = \gamma \phi' = \gamma \frac{1}{\sqrt{x'^2 + (y'-a)^2}}$$

$$A_x = \gamma \frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{x'^2 + (y'-a)^2}}$$

$$A_y = A_z = 0$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

$$x = \gamma\left(vt' + x'\right)$$

$$y = y'$$

Beobachter sei bei $x = y = 0$

$\rightarrow y' = 0 \;;\; x' = -vt'$

$$vt - x = \gamma\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) x' = -\frac{1}{\gamma} x' = -x'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \xrightarrow{x=0} -\frac{vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\phi = \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{v^2 t^2}{1 - v^2/c^2} + a^2}}$$ bzw mit $x \neq 0$

$$\phi = \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{(x-vt)^2}{1 - v^2/c^2} + (a-y)^2}} \qquad A_x = \frac{v}{c^2}\phi$$

$$E_x = -\dot{A}_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad\Big|\qquad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$= -\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi - \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$= + \frac{\gamma\left(2\frac{v}{c^2}\frac{(vt-x)}{(1-v^2/c^2)} + \frac{2(x-vt)}{1-v^2/c^2}\right)}{2\sqrt{\quad}^{\,3}}$$

$$E_x(x = y = 0) = \frac{\gamma\, v}{\sqrt{\frac{v^2 t^2}{1-v^2/c^2} + a^2}^{\,3}} \; \frac{\frac{v^2}{c^2}t - t}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$= -\frac{\gamma v t}{\sqrt{\quad}^{\,3}}$$

y- Komponente analog

B als $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \longrightarrow B_z = -\frac{\partial}{\partial y}A_x$