18.10.05

Grober Abriß über den Inhalt:

- Elektrostatik
- Dielektrika
- Magnetostatik
- Induktion
- Maxwell-Gleichungen
- Wellen
- Strahlung - Optik
- Relativist. Formulierung

Math. Begriffe u. Konzepte

- Gradient: $\underline{\nabla} f$ (Anstieg)
- Divergenz $\underline{\nabla} \cdot A$ (Quellen)
- Rotation $\underline{\nabla} \times A$ (Wirbel)
- Gauß: $\int_{(O)} \vec{A} \cdot d\vec{f} = \int_{(V)} \underline{\nabla} \cdot \vec{A} \, dV$
- Stokes: $\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_F (\underline{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{f}$
- Delta-Funktion: $\delta(x)$, $\delta(\vec{r})$ $\sim$ $\int \delta(x) \, dx = 1 = \int \delta(\vec{r}) \, d^3 r$

I. Elektrostatik

0. Einführung

(1) Historie

- Feldlinienbilder schon bei Farraday
- Maxwell setzte sie in Formeln um
- Hertz strafft Gleichungen

- Coulombgesetz $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{e}_r$
- Messungen schon 1772 von Cavendish
- Coulomb (1736 - 1806) war Ingenieur, Expt 1785/87

(2) Grundgleichungen

Divergenz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ (Quellen von E)

Rotation: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ (Wirbelfrei)

Schreibt man $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ so folgt für das Potential

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\rightsquigarrow -\Delta\phi(\vec{r}) = \rho(r)/\varepsilon_0 \quad \text{Poisson - Gleichung}$$

Speziell im Vakuum ($\rho = 0$):

$$\Delta\phi(\vec{r}) = 0 \quad \text{Laplace Gleichung}$$

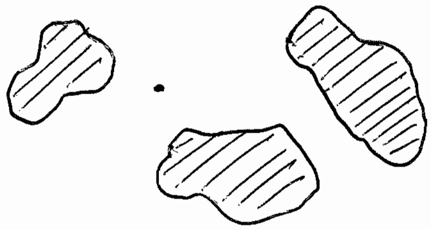
Elektrostatik bedeutet mathematisch die Lösung der Poisson- bzw. Laplace-Gl. mit gewissen Randbedingungen

-> Metallische Ränder: $\vec{E}$ senkrecht bzw. ϕ = Konst.

1. Randwertprobleme

(1) Situation

Gegeben: - Metallische Körper (geladen oder ungeladen)
- eventuell zusätzl. Punktladungen



Gesucht: Potential und Feld im ganzen Raum

Formale Aufgabe: Löse Poisson-Gl. mit RB $\phi = \text{konst.}$ auf den Leiteroberflächen und $\phi = 0$ im Unendlichen

Definition: Die Angabe von $\phi(\vec{r})$ auf dem Rand heißt „<u>Dirichlet-RB</u>"

Andere Typen sind:

<u>Neumann-RB</u>: $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ gegeben

<u>Cauchy-RB</u>: ϕ und $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ vorgegeben

$\Big\}$ selten!

Generell:

- RB sind bei DGL stets notwendig
- Wenn man ϕ mit dem Verfahren bestimmt hat, kann man am Ende auch die Ladungsdichte auf den Leitern bekommen

(2) Eindeutigkeit

Betrachte zwei Lösungen ϕ_1, ϕ_2 der Poisson-Gl., beide erfüllen die RB auf den Leitern

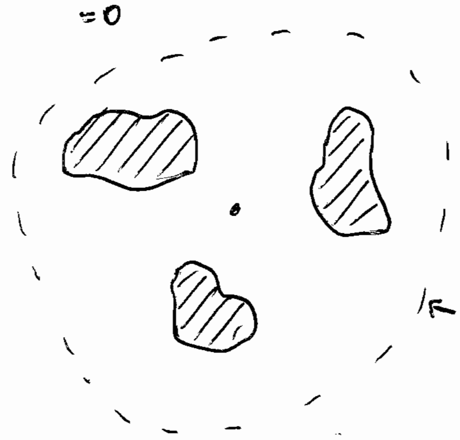
setze $\phi = \phi_1 - \phi_2$ Dann ist: $\Delta\phi = 0$ (Quellen fallen weg)
und $\phi = 0$ auf Rand (Dirichlet-RB)

bzw. $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ auf Rand (Neumann)

Betrachte Gauß:

$$\int \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, dV = \int \vec{A}\cdot d\vec{f} \qquad \text{für } \vec{A} = \phi\,\vec{\nabla}\phi$$

$$\rightsquigarrow \int_V (\phi \underbrace{\vec{\nabla}^2\phi}_{=0} + \vec{\nabla}\phi\,\vec{\nabla}\phi)\, dV = \int_O \phi\,\vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{f} = \int_O \underbrace{\phi\cdot\frac{\partial\phi}{\partial n}}_{=0 \text{ für beide RB!}} df$$



muss beim Integrieren berücksichtigt werden

$$\rightsquigarrow \int_V (\vec{\nabla}\phi)^2\, dV = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\phi = 0} \rightarrow \phi \text{ ist im Volumen Konstant}$$

$\Rightarrow$ Für Dirichlet muss $\phi = 0$ auf Rand sein

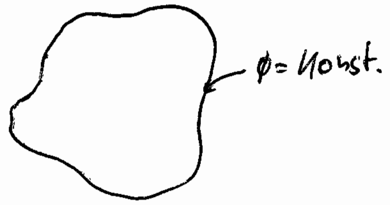
$\rightsquigarrow \phi = 0$ überall

$\rightsquigarrow \boxed{\phi_1 = \phi_2} \Rightarrow$ eindeutig!

$\Rightarrow$ Für Neumann: $\boxed{\phi_1 = \phi_2 + \text{Konst.}}$ aber $\vec{E}$ ist dann eindeutig!

20.10.05

Anwendung: Feld in einem metall. Hohlraum



innen: $\Delta\phi = 0$

$\sim$ ϕ = Konst. ist <u>eine</u> Lösung

Nach dem Satz ist es die <u>einzige</u> Lösung

$\sim$ $E = -\vec{\nabla}\phi \equiv 0$ (Faradayscher Käfig)

(3) Praktisches Vorgehen zur Lösung solcher Probleme

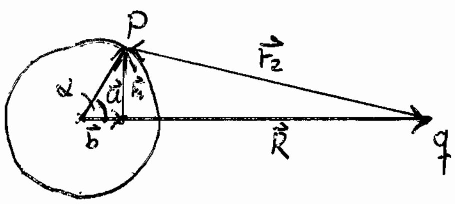
- Bildladungsmethode (für einfache Geometrien)
- Konforme Abbildungen (für 2D Probleme)
- Lösung der Laplace/Poisson-Gl. in ~~spe~~ spez. KO-Systemen
- Numerische Lösung

<u>2. Bildladungsmethode</u>

Prototyp: Punktladung vor metall. Kugel

(1) Bestimmung der Bildladung

Geometrie:



Idee: Man kann b so wählen, dass r_1/r_2 für alle P gleich ist.

Schreibe:

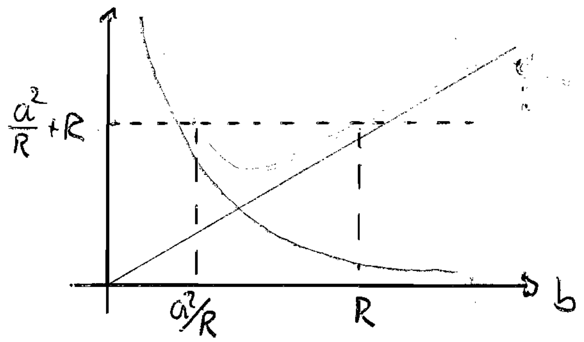
$\vec{a} = \vec{b} + \vec{r_1} \quad \rightarrow \quad \vec{r_1} = -\vec{b} + \vec{a}$

$\vec{a} = \vec{R} + \vec{r_2} \quad \rightarrow \quad \vec{r_2} = \vec{a} - \vec{R}$

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{(a^2+b^2-2ab\cos\alpha)}{(a^2+R^2-2aR\cos\alpha)} = \frac{b}{R}\,\frac{\frac{a^2R}{b}+bR-2aR\cos\alpha}{a^2+R^2-2aR\cos\alpha}$$

Dies ist unabh. von α, wenn

$$R\left(\frac{a^2}{b}+b\right) = a^2+R^2 \iff \frac{a^2}{b}+b = \frac{a^2}{R}+R$$



Lösungen:

$b = R$ (unbrauchbar)

$\boxed{b = a^2/R}$

Dann ist $\boxed{\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{R}}$

Jetzt bei $\vec{b}$ eine Ladung $(-q')$ anbringen
Dann ist das Potential auf der Kugel

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_2}-\frac{q'}{r_1}\right).$$

Dies ist identisch null, wenn

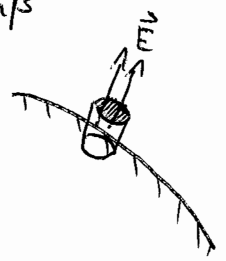
$$\frac{q}{r_2} = \frac{q'}{r_1} \rightsquigarrow q' = \frac{r_1}{r_2}q = \underbrace{\frac{a}{R}}_{<1}q$$

Die Ladung $(-q')$ simuliert das Feld der Influenz-ladungen auf der Kugeloberfläche. $(-q')$ ist die gesamte Influenzladung auf de Kugeloberfläche.

Wenn die Kugel neutral sein soll, dann muß man noch eine Ladung $(+q')$ in den Mittelpunkt setzen.

(3) Oberflächenladungen

Gauß



$$\int \vec{E} \cdot d\vec{f} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\leadsto E_n \cdot df = \frac{\sigma \cdot df}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \quad E_n = \sigma / \varepsilon_0 \quad \leadsto \quad \sigma = E_n \cdot \varepsilon_0$$

$\rightarrow$ Übungen

(4) Anziehungskraft

Diese lässt sich aus dem Feld der Bildladungen berechnen

Betrag:

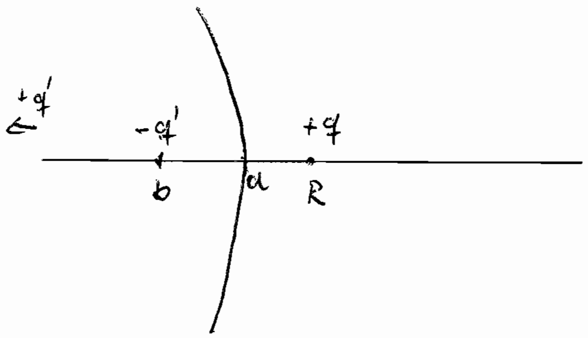
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q'}{(R-b)^2} - \frac{q'}{R^2} \right) \cdot q$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q^2 \left(\frac{a/R}{(R-\frac{a^2}{R})^2} - \frac{a/R}{R^2} \right)$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a}{R^3} \left(\frac{1}{(1-a^2/R^2)^2} - 1 \right)$$

$$\leadsto \frac{1}{R^5} \text{ für } R \gg a$$

(5) Grenzfall der Ebene

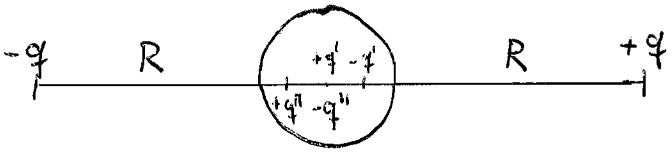


Wenn $R \approx a$, sieht die Kugeloberfläche wie eine Ebene aus

Dann ist

$$a - b = \underbrace{\frac{a}{R}}_{\approx 1} (R - a)$$

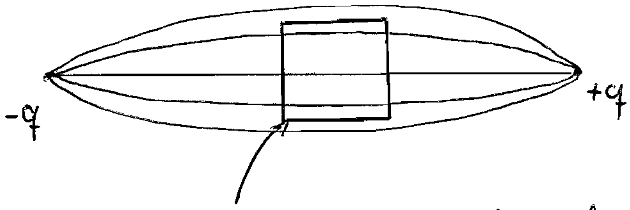
(6) Kugel zwischen zwei Punktladungen



In der Kugel sitzt ein Dipol mit Moment

$$p = 2b \cdot q' = 2\,q\,\frac{a^3}{R^2}$$

Diese Anwendung beschreibt auch eine Kugel in einem <u>homogenen E-Feld</u>, wenn man $\pm q$ weit auseinander zieht



hier ist das Feld etwa homogen

$$E \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q \cdot \frac{1}{R^2} \cdot 2$$

Damit ist

$$p = 2 \cdot \overbrace{2\pi\varepsilon_0 \cancel{R^2}}^{\alpha} \cdot E \cdot \frac{a^3}{\cancel{R^2}}$$

$$\rightsquigarrow \underline{p = \underbrace{(4\pi\varepsilon_0 \cdot a^3)}_{\text{Polarisierbarkeit } \alpha} E}$$

25.10.05

3. Konforme Transformationen

Elegante Methode für 2D Potentialprobleme

(1) Mathematische Basis

(a) Sei $z = x + iy$. Betrachte analytische Funktionen $f(z)$.

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dz} \cdot \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{=1} = \frac{df}{dz} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dz^2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = i \frac{df}{dz} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{d^2 f}{dz^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0} \quad \text{Laplace-Gl.}$$

mit $f = u + iv$ erfüllen u und v ebenfalls die Laplace-Gl.

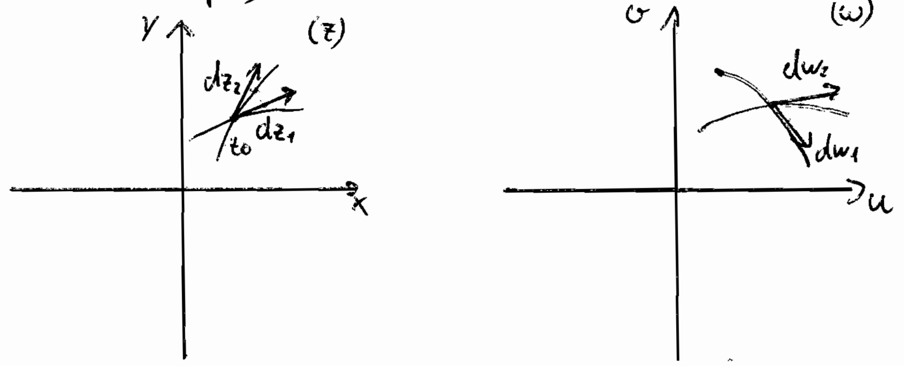
(b) Äquipotential- und Feldlinien

Betrachte die Kurvenscharen $u = \text{konst.}$ und $v = \text{konst.}$

Beh.: Diese stehen aufeinander senkrecht.

Bew.: Betrachte die Abb.

$z \Rightarrow w = f(z)$



Sei $dz_i = dr \cdot e^{i\varphi_i}$ (z-Ebene)

$$\rightarrow \frac{dz_2}{dz_1} = e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

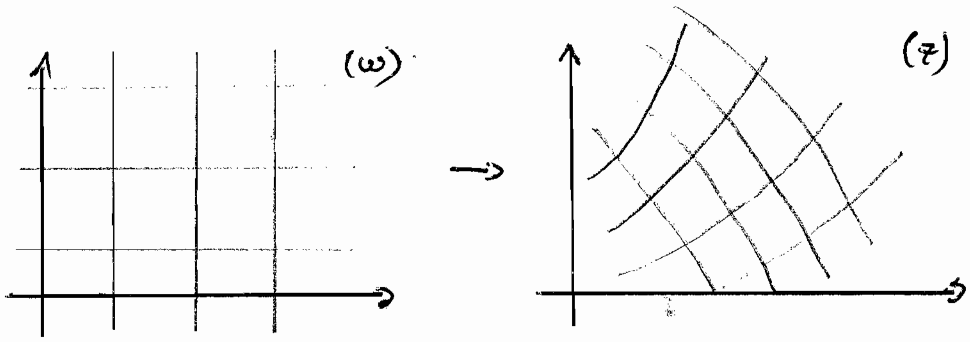
In der w-Ebene:

$$dw_i = f'(z_0) \cdot dz_i = f'(z_0) \cdot dr \cdot e^{i\varphi_i}$$

$$\rightarrow \frac{dw_2}{dw_1} = e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}$$ → gleicher Winkel

---

Die Linien $u = $ konst., $v = $ konst sind in der w-Ebene Geraden



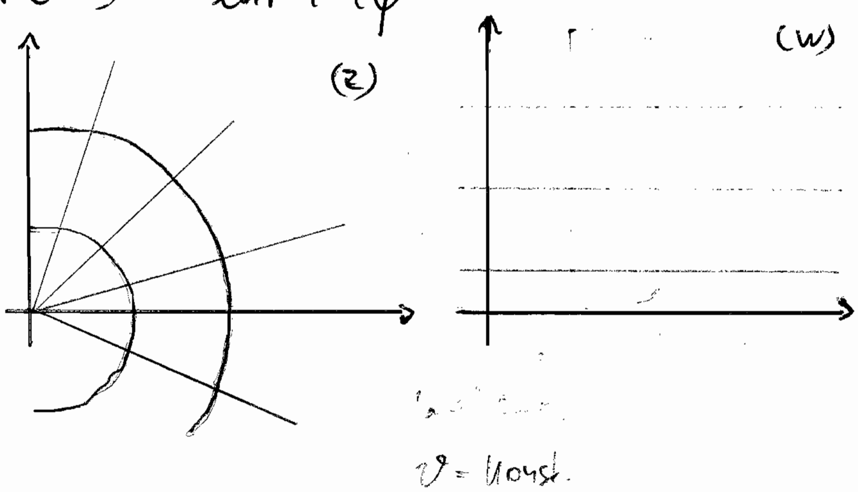
Wählt man also u als Potential, so sind die Linien $v = $ konst. die Feldlinien und umgekehrt.

(2) Illustration

$$w = f(z) = \ln z$$

$$u + iv = \ln(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$$

$$\leadsto \quad u = \ln r$$
$$v = \varphi$$



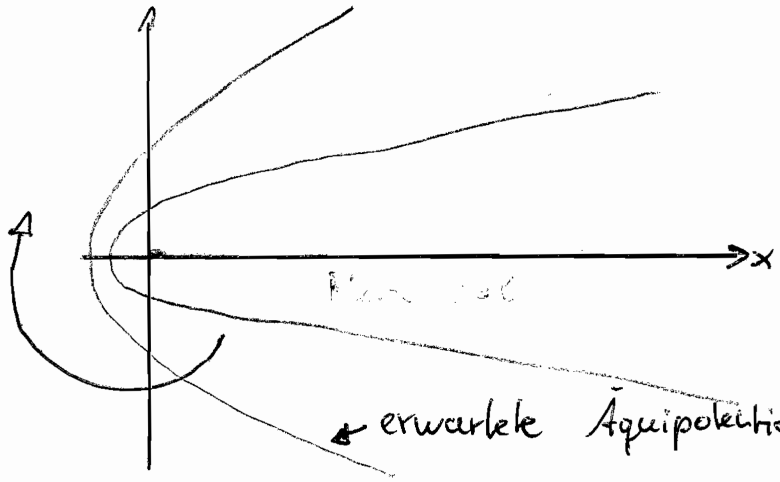
Wähle u als Potential → Zylinderkondensator

$u = \ln r \to E = \frac{1}{r}$

Wähle v als Potential → zwei Platten unter einem Winkel

4. Beispiele konformer Transformationen

(1) Halbunendliche geladene Platte



← erwartete Äquipotentiallinien $\sigma = \text{konst.}$

Idee: Die untere Halbebene durch die Abb. nach oben bringen und damit die Äquipotentiall. „geradebiegen"

Das geht mit: $w = \sqrt{z}$

Sei $w = \rho \cdot e^{i\alpha}$; $z = r e^{i\varphi}$

$\leadsto \rho e^{i\alpha} = \sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}$

$\Rightarrow \rho = \sqrt{r}$; $\alpha = \frac{\varphi}{2}$

↳ $\varphi = 2\pi$ entspricht $\alpha = \pi$ (obere Halbebene)

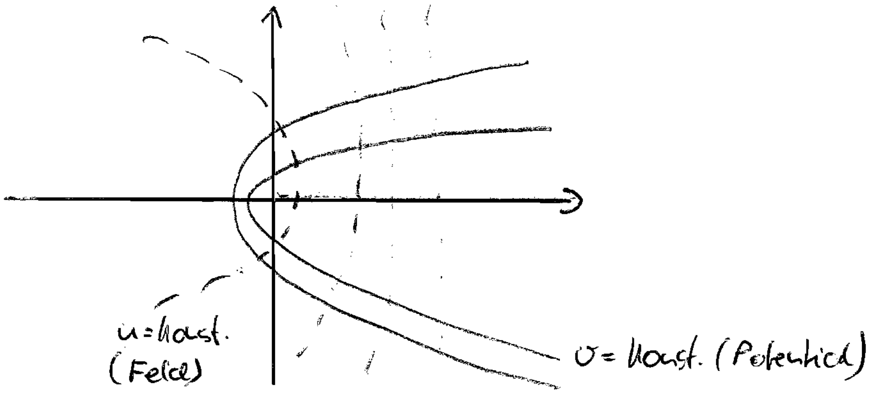
Die volle z-Ebene wird auf die obere Halbebene der w-Ebene abgebildet.

Äquipotentiallinien: $z = x + iy = w^2 = (u+iv)^2 = u^2 - v^2 + 2iuv$

$$\rightarrow x = u^2 - v^2 \; ; \; y = 2uv$$

eliminiere u: $u = \frac{y}{2v}$

$$\rightarrow x = \frac{y^2}{4v^2} - v^2 \; ; \text{ Parabeln}$$



Feldstärke: Auf der Platte braucht man nur $\frac{\partial v}{\partial y} = E_y$

Verwende $u + iv = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$

$$\rightarrow v = \sqrt{r} \sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{r}\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$$

$$= \sqrt{r}\sqrt{\frac{1 - x/r}{2}}$$

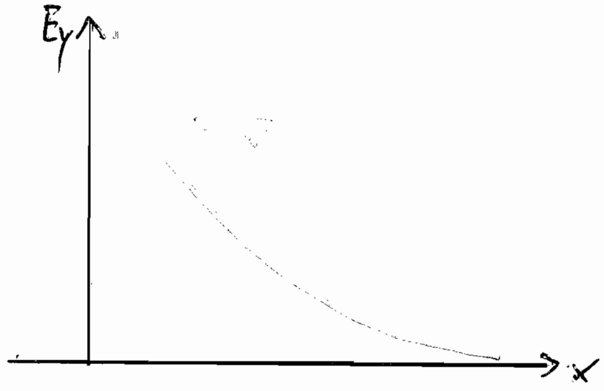
$$v = \sqrt{\frac{r-x}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{2}}$$

Entwickeln für $y \rightarrow 0$:

$$v \cong \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x\left(1 + \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2}\right) - x} = \frac{y}{2\sqrt{x}}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{2\sqrt{x}}}}$$

Diskussion:



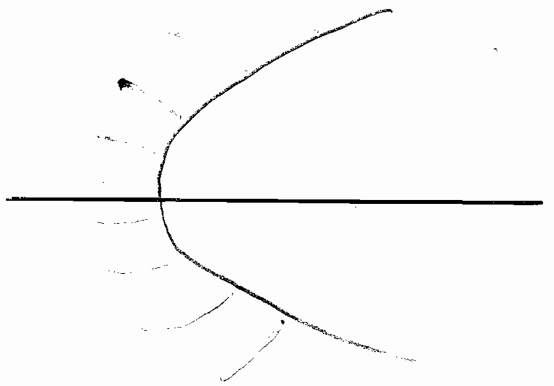
Es werden durch die Coulomb-Abstoßung Ladungen zur Kante hin geschoben.

Beachte, dass $\sigma(x)$ sich integrieren lässt:

$$\int_0^a \sigma(x)\,dx \text{ ist endlich!}$$

Potenzgesetz $\longleftrightarrow$ keine typische Länge

Man hat auch das Problem eines parabolischen metall. Randes gelöst!



An der Spitze ist wieder
$$E \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$\rightarrow$ „Spitzeneffekt"

(2) Halbunendlicher Plattenkondensator

Wurde schon von Helmholz (1848) behandelt

Strömungen:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\varrho \vec{v}) = 0$$

Wenn $\varrho = \text{konst.} \rightarrow \vec{\nabla}\vec{v} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla}\phi$ $\Big\}$ $\vec{\nabla}^2 \phi = 0$

Hier betrachtet man die Abb.

$$z = 1 + w + e^w \quad (\text{als } z = z(w) \text{ gegeben})$$

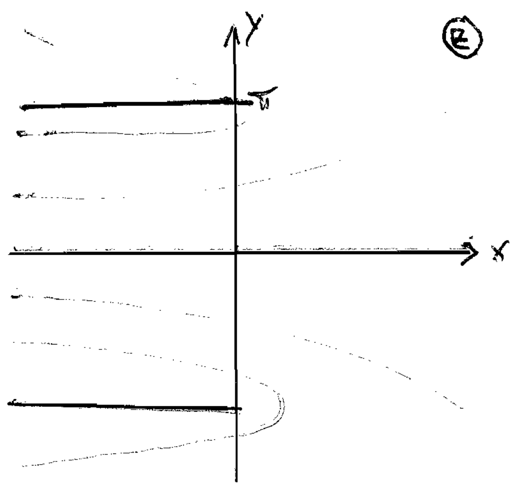
27.10.05

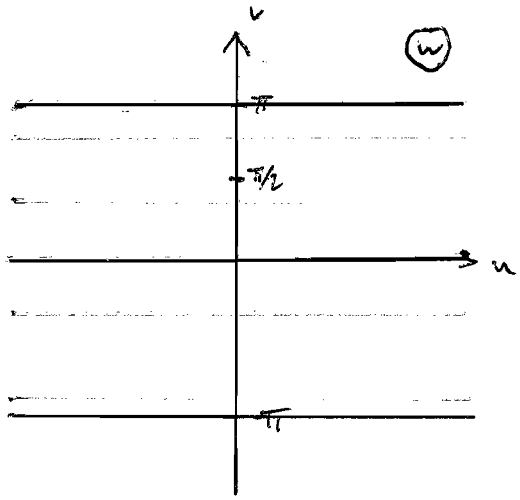
$$\rightarrow x = 1 + u + e^u \cdot \cos v$$
$$y = v + e^u \cdot \sin v$$

Wir wählen v als Potential

Äquipotentiallinien:

$v = 0$: $y = 0$, $x = 1 + u + e^u$ $\Rightarrow$ $u \to -\infty$: $x \to -\infty$; $u \to +\infty$: $x \to +\infty$





$0 < v < \pi$: $\quad u \to -\infty,\ y \to v,\ x \to -\infty$

$u \to +\infty,\ y \to -\infty,\quad x \to \begin{cases} +\infty & 0 < v < \frac{\pi}{2} \\ -\infty & \frac{\pi}{2} < v < \pi \end{cases}$

$v = \pi$: $\quad \begin{aligned} y &= \pi \\ x &= 1 + u - e^{u} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u \to -\infty &: x \to -\infty \\ u \to +\infty &: x \to -\infty \\ u = 0 &: x = 0 \end{aligned}$

Um die Dimensionen richtig zu bekommen, kann man schreiben:

$$w \to \frac{\pi \cdot w}{V} \quad , \quad z \to \frac{\pi \cdot z}{a}$$

$$\rightsquigarrow \quad z = \frac{a}{\pi}\left(1 + \frac{\pi w}{V} + e^{\frac{\pi}{V} w}\right)$$

- Platten liegen bei $z = \pm a$
- Das Potential ist $\pm V$

Feldstärke:

$$E_x = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad ; \quad E_y = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

Leider hat man $v(x,y)$ nicht explizit, aber für $v = \pm V$ u. $v = 0$ gilt:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)}$$

weil:

$$\frac{dv}{dv} = 1 = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial v}}_{=0 \text{ für } v = \pm V, 0}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{d}{V}\left[1 + e^{\frac{\pi v}{V}} \cos\frac{\pi v}{V}\right]$$

Das ergibt auf der oberen Platte:
$(v = V)$:

$$E_y = -\frac{V}{a}\frac{1}{1-e^{\frac{\pi u}{V}}}$$

Für $u<0$ ist man auf der unteren Seite der Platte und für $u>0$ auf der Oberseite.

5. Die Seperationsmethode

Eine Verfahren zur Lösung partieller Diffgl. wie z.B. Laplace-Glg., Wellenglg., Schrödingergl., wenn die Geometrie einfach ist.

(1) Verfahren:

(a) Suche partikuläre Lösung mit den Ansatz

$$\phi(x,y,z) = X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)$$

Laplace: $$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2X}{dx^2} YZ + \frac{d^2Y}{dy^2} X\cdot Z + \frac{d^2Z}{dz^2} X\cdot Y = 0$$

Division durch $X\cdot Y\cdot Z$

$$\Rightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

Gleichung kann nur erfüllt sein, wenn jede Term für sich konstant ist.

→ 3 gewöhnliche Diffgl. vom Typ

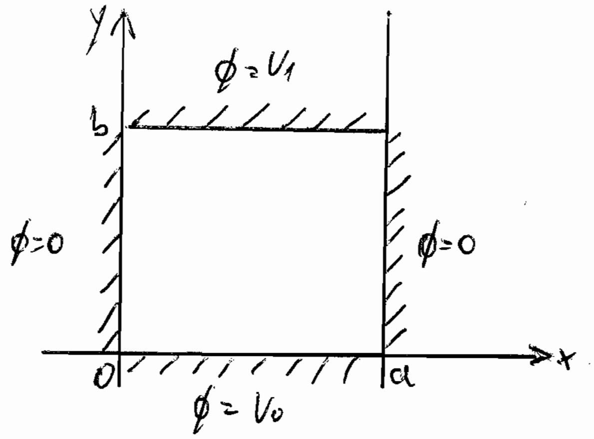
$$f'' = \lambda \cdot f$$

Diese lösen!

(b) Aus der Überlagerung solcher Lösungen eine allg. Lösung konstruieren.

Randbedingungen müssen hinzugenommen werden.

(2) Beispiel in 2D



Setze:

$$\frac{d^2X}{dx^2} \cdot \frac{1}{X} = -k^2$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} \cdot \frac{1}{Y} = k^2$$

Lösungen:

$$X(x) = A \cdot e^{ikx} + B \cdot e^{-ikx} \quad ; \text{ oszilliert}$$
$$Y(y) = C \cdot e^{ky} + D\, e^{-ky} \quad ; \text{ monoton}$$

RB für $x=0$, $x=a$ führen zu

$$X(x) = A \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \quad ; \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Die RB für $y=0$, $y=b$ lassen sich mit einer einzigen Art. $X(x) \cdot Y(y)$ nicht erfüllen.

→ Allgemeine Überlagerung betrachten

$$\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\left[\cancel{D_n} C_n e^{\frac{\pi n}{a}y} + D_n e^{-\frac{\pi n}{a}y}\right]$$

RB:

$$\phi(x,0) = \sum_n \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\left[C_n + D_n\right] = V_0$$

$$\phi(x,b) = \sum_n \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\left[C_n e^{\frac{\pi n b}{a}} + D_n e^{-\frac{\pi n b}{a}}\right] = V_1$$

Man bestimmt C_n, D_n ~~...~~ mit Hilfe der Orthogonalitätsbez.:

$$\int_0^a dx \, \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) = \frac{a}{2}\delta_{nm}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{2}\left[C_m + D_m\right] = \frac{V_0 \, 2a}{\pi m}, \quad m \text{ ungerade}$$

$$\frac{a}{2}\left[C_m e^{\dots} + D_m e^{\dots}\right] \; \frac{V_1 \, 2a}{\pi m}, \quad \text{"}$$

$\Rightarrow C_m, D_m$

$\Rightarrow$ Problem gelöst

01. 11. 05

Spezialfall: $b \to \infty$, $V_1 = 0$

Es folgt: $C_n = 0$

$$\frac{a}{2} D_n = \frac{V_0 \cdot 2a}{n \pi}$$

Das gibt:

$$\phi(x,y) = V_0 \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{n} \sin\frac{\pi n x}{a} \, e^{-\frac{\pi n y}{a}}$$

Es gibt also eine typische Länge (a) im Problem

Man kann eine geschlossene Formel erhalten

$$\phi = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n\,\text{ung.}} \frac{1}{n} \frac{1}{2i} \left(e^{i\frac{\pi n x}{a}} - e^{-i\frac{\pi n x}{a}} \right) e^{-\frac{\pi n y}{a}}$$

$$= \frac{4V_0}{\pi} \, \mathrm{Im} \left\{ \sum_{n\,\text{ung.}} \frac{1}{n} \varsigma^n \right\} \; ; \; \varsigma = e^{i\frac{\pi}{a}(x+iy)}$$

$$\sum_{n\,\text{ger.}} \varsigma^n = \varsigma^0 + \varsigma^2 + \dots = \frac{1}{1-\varsigma^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\varsigma} + \frac{1}{1-\varsigma} \right)$$

Integriere dies:

$$\sum_{n\,\text{ger}} \int d\varsigma\, \varsigma^n = \sum_{n\,\text{ger}} \frac{\varsigma^{n+1}}{n+1} = \sum_{n\,\text{ung}} \frac{\varsigma^n}{n} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\varsigma}{1-\varsigma}$$

$$\longrightarrow \quad \phi = \frac{4V_0}{\pi} \frac{1}{2} \mathrm{Im} \left\{ \ln \frac{1+\varsigma}{1-\varsigma} \right\}$$

Verwende:

$$\frac{1+\varsigma}{1-\varsigma} = \frac{(1+\varsigma)(1-\varsigma^*)}{|1-\varsigma|^2} = \frac{1-|\varsigma|^2 + \overbrace{(\varsigma-\varsigma^*)}^{2i\,\mathrm{Im}\,\varsigma}}{|1-\varsigma|^2}$$

Dies in Lösung einsetzen

$$\mathrm{Im}\left\{ \ln \frac{1+\varsigma}{1-\varsigma} \right\} = \mathrm{Im}\, \ln\left(1 - |\varsigma|^2 + 2i\,\mathrm{Im}\,\varsigma \right)$$

$$= \varphi$$

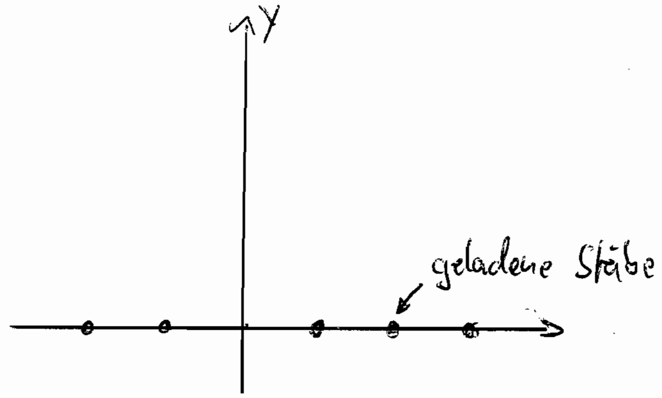
$$= \arctan \left\{ \frac{2\,\mathrm{Im}\,\varsigma}{1-|\varsigma|^2} \right\}$$

$$= \arctan \left\{ \frac{2e^{-\pi y/a} \cdot \sin\frac{\pi x}{a}}{1-e^{-2\pi y/a}} \right\}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\phi = \frac{2V_0}{\pi} \arctan \left\{ \frac{\sin\frac{\pi x}{a}}{\sinh\frac{\pi y}{a}} \right\}}$$

Endergebnis
→ Übung 5

(3) Das Stabgitter



Gleicher Separationsansatz

$$\phi = X(x) \cdot Y(y)$$

Symmetrien:

- Inversion $X(-x) = X(x) \rightarrow X(x) = \cos(kx)$
- Periodizität $X(x+a) = X(x) \rightarrow k = \frac{2\pi}{a}$

Randbedingung: $y \rightarrow \infty \Rightarrow \phi = 0$

$\rightarrow$ keine ansteigende e-Fkt.

$$\phi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot \cos\frac{2\pi n x}{a} \, e^{-\frac{2\pi n y}{a}}$$

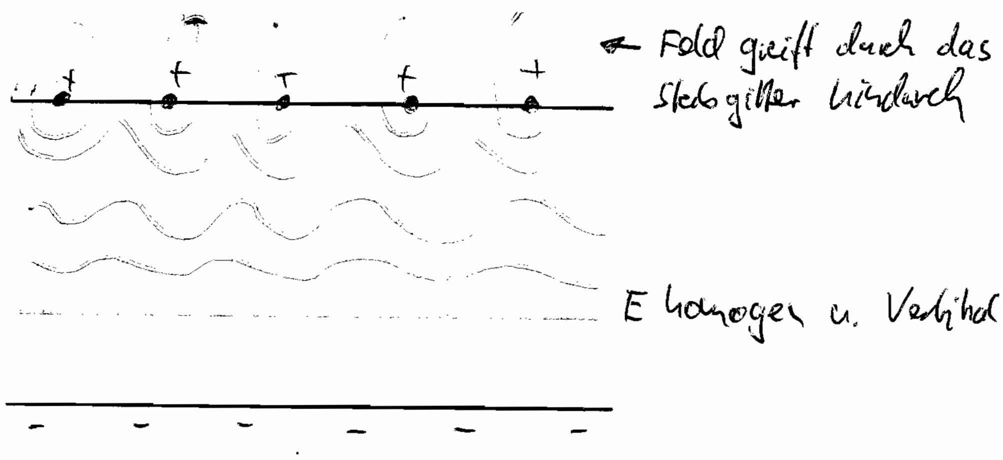
Man braucht noch eine Bedingung für das Verhalten in der Umgebung der Stäbe

Dort ist $\phi \propto \ln(r)$

Berücksichtigt man dies, so ergibt sich:

$$O(x,y) = \frac{A}{2}\left\{\ln 2\left(\cosh\frac{2\pi y}{a} - \cos\frac{2\pi x}{a}\right) - \frac{2\pi y}{a}\right\}$$

Feldlinien:



(4) Allgemeines zur Separationsmethode

- In 3D separieren sich sowohl Laplace-Gl. ($\Delta\phi = 0$) als auch die Helmholz-Gl. ($\Delta\phi + k^2\phi = 0$) in 11 verschiedenen KO-Systemen.

- In 2D separiert die Laplace-Gl. in allen durch Konf. Transformationen erhaltenen KO-Systemen.

6. Polarkoordinaten in Kugelfunktionen

(1) Laplace Gl. in PC

$$\Delta\phi = \vec{\nabla}^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right] = 0$$

Wie leitet man das her?

A. Gradient u. Divergenz in Polarkoordinaten berechnen.

(2) Separationsansatz

$$\phi(r,\vartheta,\varphi) = R(r)\, P(\vartheta)\, Q(\varphi)$$

Einsetzen und durch $R \cdot P \cdot Q$ dividieren, mit $r^2 \sin^2\vartheta$ multiplizieren:

$$r^2 \sin^2\vartheta \left[\frac{1}{R \cdot r} \frac{d^2}{dr^2}(rR) + \frac{1}{P} \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) \right] + \underbrace{\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2}}_{-m^2 \text{ setzen}} = 0$$

Das ergibt:

$$Q(\varphi) = a \cdot e^{im\varphi} + b\, e^{-im\varphi}$$

Eindeutigkeit: $Q(\varphi + 2\pi n) = Q(\varphi) \rightarrow m$ ganzzahlig

Die $e^{\pm im\varphi}$ bilden ein vollständiges Funktionensystem in dem Intervall $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (entspricht Fourier-Entwicklung)

Es bleibt:

$$\frac{1}{rR} \frac{d^2}{dr^2}(rR) + \underbrace{\frac{1}{P} \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) - \frac{m^2}{r^2 \sin^2\vartheta}}_{-\frac{k^2}{r^2} \text{ setzen}}$$

$\rightarrow$ Gleichung für P wobei $x = \cos\vartheta$

3. 11. 05

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right] + \left[k^2 - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P = 0$$ Legendre Diffgl.

$x = \cos\vartheta$

(3) Lösung für $m = 0$

Suche $P(x)$ in Form einer Potenzreihe

$$P(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ; \quad |x| \leq 1$$

$$P'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)\, a_n\, x^{n+\alpha-1}$$

$$(1-x^2)P'(x) = \sum_n (n+\alpha)\, a_n \left(x^{n+\alpha-1} - x^{n+\alpha+1}\right)$$

Einsetzen gibt:

$$\sum_n a_n \left[(n+\alpha)(n+\alpha-1)\, x^{n+\alpha-2} - (n+\alpha)(n+\alpha+1)\, x^{n+\alpha} - k^2 x^{n+\alpha}\right] = 0$$

Koeff. von allen x^m müssen verschwinden

$n=0$: $\underbrace{a_0 \cdot \alpha(\alpha-1)}\; x^{\alpha-2}$ Diese Potenz kommt nur einmal vor

$\Rightarrow a_0 = 0$ od. $\alpha(\alpha-1) = 0$

$\hookrightarrow \alpha = 0$ od. $\alpha = 1$

Allgemeine $n \geq 2$

$$a_{n+2} = \frac{(n+\alpha)(n+\alpha+1) - k^2}{(n+\alpha+2)(n+\alpha+1)}\, a_n$$ Rekursionsgleichung

Reihe bricht ab, wenn

$\alpha = 0$: $k^2 = \ell(\ell+1) \rightarrow$ Abbruch bei $n = \ell$
(wenn ℓ gerade sein)

$\alpha = 1$: $k^2 = (\ell+1)(\ell+2) \rightarrow$ Abbruch bei $n = \ell - 1$
(wenn ℓ ungerade ist)

In beiden Fällen ist die höchste vorkommende Potenz in $P(x)$ x^{ℓ}

Die entstehenden Polynome heißen Legendre-Polynome $P_\ell(x)$

Wenn die Reihe nicht abbricht, divergiert sie bei $x = \pm 1$ $(\vartheta = 0, \pi)$

Eigenschaften der L-Polynome

- Sie werden so normiert, dass

$$P_\ell(1) = 1$$

- Die niedrigsten sind:

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

- Sie bilden ein vollständiges, orthonormales Funktionensystem in $-1 \leq x \leq 1$

$$\rightarrow \int_{-1}^{+1} dx \, P_\ell(x) P_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell,\ell'}$$

und man kann jedes beschränkte $f(x)$ entwickeln

$$f(x) = \sum_\ell c_\ell P_\ell(x)$$

$$\rightarrow c_\ell = \int_{-1}^{+1} \frac{2\ell+1}{2} dx \, f(x) P_\ell(x)$$

Vollständigkeit heißt:

$$\int_{-1}^{+1} dx \left| f(x) - \sum_{\ell=1}^{N} c_\ell P_\ell(x) \right|^2 \xrightarrow{N \to \infty} 0$$

– (Merk-) Formel von Rodriguez

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \cdot \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} \left[(x^2-1)^\ell \right]$$

(4) Fall $m \neq 0$

Man geht analog vor.

Damit hier die Lösungen endlich bleiben, muss

$\ell \geq 0$ ganze Zahl sein

und $-\ell \leq m \leq \ell$

Man erhält dann Polynome $P_\ell^m(x)$

$$P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} \left[(x^2-1)^\ell \right]$$

Diese sind wieder orthogonal (für gleiches m)

$$\int dx \, P_\ell^m P_{\ell'}^m = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'}$$

Man verknüpft nun $P_\ell^m(x)$ mit $e^{im\varphi}$ und schreibt:

$$Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos\vartheta) \, e^{im\varphi}$$

$\Rightarrow$ Kugelfunktionen

Die $Y_{\ell m}$ bilden ein vollst. Fkt. System auf der ges. Kugelob.

Eigenschaften:

- $\int \underbrace{d\Omega}_{\sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi} Y^*_{\ell' m'} Y_{\ell m} = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$

- $m = 0 \Rightarrow Y_{\ell 0} = P_\ell(\cos\vartheta) \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}$

- $\ell = 0 \quad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

- $\ell = 1 \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta \, e^{i\varphi}$

  $Y_{10} = \sqrt{3/4\pi} \cos\vartheta$

  $Y_{1,-1} = \sqrt{3/8\pi} \sin\vartheta \, e^{-i\varphi}$

(5) Radialgleichung

$$\frac{1}{rR} \frac{d^2}{dr^2}(rR) = \frac{k^2}{r^2} = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$$

$$\frac{d^2}{dr^2}(r \cdot R(r)) = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}(rR)$$

Lösung: $r \cdot R(r) = r^\beta$ mit $\beta = \ell+1$ od. $\beta = -\ell$

Also: $R(r) = a \cdot r^\ell + b \cdot r^{-(\ell+1)}$

(6) Endresultat

Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung lässt sich in der Form

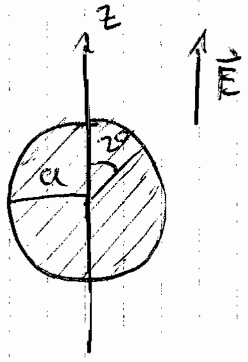
$$\phi(r,\vartheta,\varphi) = \sum_\ell \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left[a_{\ell m} r^\ell + b_{\ell m} r^{-(\ell+1)}\right] Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$$

Die $a_{\ell m}$, $b_{\ell m}$ werden durch die Randbedingungen bestimmt.

7. Einfache Beispiele

Wir betrachten Probleme, die rot. symm. sind, so dass nur die P_ℓ ($Y_{\ell 0}$) auftreten.

(1) Metallische Kugel in einem homogenen E-Feld



$$\phi = \phi(r, \vartheta)$$

Potential hat die Form

$$\phi(r,\vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-(\ell+1)} \right] P_\ell(\cos\vartheta)$$

RB:

(a) $\phi = 0$ für ~~r=0~~

(b) $\phi = E \cdot z = Er\cos\vartheta = Er\,P_1(\cos\vartheta)$ für $r \to \infty$

Aus (b) folgt:

$$A_1 = -E$$

$$A_\ell = 0 \qquad \ell > 1$$

Aus (a) folgt durch Multipl. mit $P_{\ell'}$ und Integration

$$0 = \sum_\ell \left[A_\ell a^\ell + B_\ell a^{-(\ell+1)} \right] \frac{2\ell+1}{2} \delta_{\ell\ell'}$$

$$\to A_{\ell'} a^{\ell'} + B_{\ell'} a^{-(\ell'+1)} = 0$$

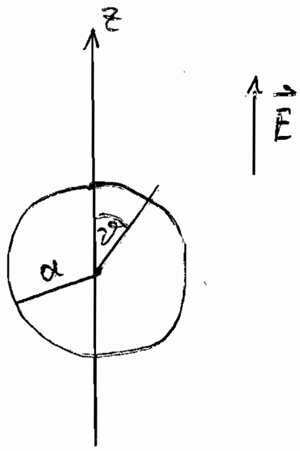
$$\to B_\ell = -A_\ell \cdot a^{2\ell+1}$$

$\ell = 1 \quad B_1 = -A_1 a^3 = E \cdot a^3$

$\ell > 1 \quad B_\ell = 0$; (weil $A_\ell = 0$)

$$\phi(r,\vartheta) = -E\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right) P_1(\cos\vartheta)$$

$$= \underbrace{-Ez}_{\text{Potential zum homogenen E-Feld}} + \underbrace{E\frac{z}{r^3}a^3}_{\text{Potential eines Dipols}}$$



$$\phi = \underbrace{-Ez}_{\text{hom. Feld}} + \underbrace{\frac{z \cdot a^3 \cdot E}{r^3}}_{\text{Dipol}}$$

Dipolpot.:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p_z \cdot z}{r^3}$$

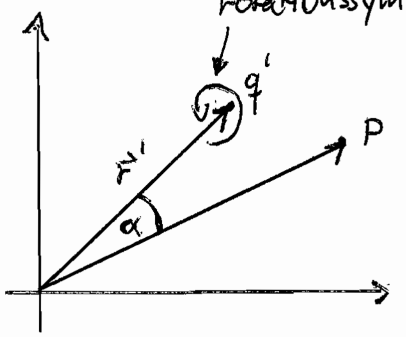
wenn $\vec{p}$ in z-Richtung

Also: $\frac{p_z}{4\pi\varepsilon_0} = a^3 E$ vgl. Bildladungsmethode

Anmerkung: $l=0$-Term in ϕ

$$(A_0 r^0 + B_0 \tfrac{1}{r}) P_0 = \underbrace{A_0}_{\text{unwichtig}} + \underbrace{B_0 \tfrac{1}{r}}_{\text{Pot., wenn Gesamtladung} \neq 0}$$

(2) Potential einer Punktladung in PK



$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Wähle $\vec{r}'$ als Polarachse

$$\rightarrow \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\alpha)$$

A_l, B_l bestimmt man aus dem Wert auf der Polarachse. Auf der Achse ist

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{|r-r'|} = \begin{cases} \frac{1}{r-r'} = \frac{1}{r}\frac{1}{1-\frac{r'}{r}} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l, & r>r' \\ \frac{1}{r'-r} = \frac{1}{r'}\frac{1}{1-\frac{r}{r'}} = \frac{1}{r'}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^l, & r'>r \end{cases}$$

Vergleiche mit obiger Formel für $\alpha = 0$, $P_\ell(1) = 1$

$r > r'$: $A_\ell = 0$, $B_\ell = r'^\ell$

$r < r'$: $A_\ell = r'^{-(\ell+1)}$, $B_\ell = 0$

Also:

$$\frac{1}{|\vec r - \vec r'|} = \begin{cases} \frac{1}{r} \sum_\ell \left(\frac{r'}{r}\right)^\ell P_\ell(\cos\alpha), & r > r' \\ \frac{1}{r'} \sum_\ell \left(\frac{r}{r'}\right)^\ell P_\ell(\cos\alpha), & r < r' \end{cases}$$

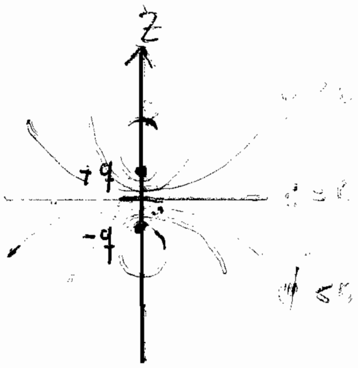
Dies ist das Resultat für beliebige Orte P bzw. $\vec r$.

8. Multipole

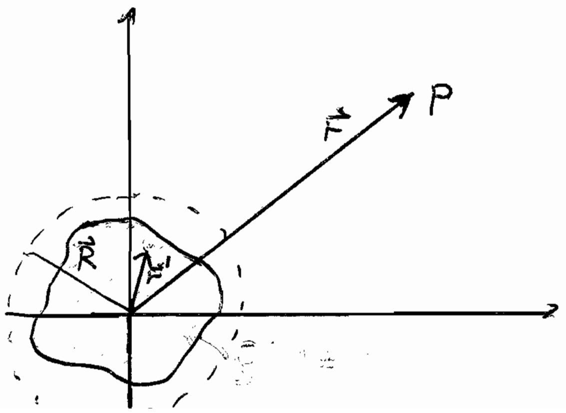
Gesucht: Potential u. Feld einer beliebigen Ladungsverteilung in großem Abstand

(1) Erinnerung: Dipol

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec p \cdot \vec r}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p_z \cdot z}{r^3} = \frac{p_z}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} P_1(\cos\vartheta)$$



(2) Allgemeiner Fall



Gesucht: ϕ für $|\vec r| \gg |\vec R|$

Für diesen Fall ist:

$$\frac{1}{|\vec r - \vec r'|} = \frac{1}{r} \sum_\ell \left(\frac{r'}{r}\right)^\ell \underbrace{P_\ell(\cos\alpha)}_{\frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} Y^*_{\ell m}(\vartheta', \varphi') Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)}$$

(→ Bücher)

$$\phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\ell,m}\frac{1}{r^{\ell+1}}\frac{4\pi}{2\ell+1}Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)\underbrace{\int d^3r' \rho(\vec r') r'^{\ell} Y^*_{\ell m}(\vartheta',\varphi')}_{q_{\ell m}}$$

$q_{\ell m}$: „Momente der Ladungsverteilung"

$$\boxed{\phi(\vec r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{\ell,m}\frac{q_{\ell m}}{2\ell+1}\,\frac{Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)}{r^{\ell+1}}}$$

Diskussion:

- Hat die Form der allg. Lösung der Laplace-Gleichung aber nur mit <u>absteigenden</u> Potenzen von r.

- Jedes $Y_{\ell m}$ ist mit einer Potenz $(1/r^{\ell+1})$ von r verknüpft.

- Der Koeff. von $\frac{1}{r^{\ell+1}}$ ist durch das Moment $q_{\ell m}$ bestimmt.

- Weit entfernt dominiert die kleinste Potenz
  z.B. wenn $q_{00} \neq 0$, $q_{00} \sim \int d^3r' \rho(r') = Q/\sqrt{4\pi}$

  $$\rightarrow \phi \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r}$$

- Je näher man an der Ladungsverteilung ist, desto mehr sieht man die Feinstruktur, beschrieben durch höhere ℓ

(3) Quadrupolmoment

$$\ell = 2: \quad q_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\int d^3r' \rho(\vec r')\, r'^2 (3\cos^2\vartheta' - 1)$$

$$= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\underbrace{\int d^3r' \rho(\vec r')(3z'^2 - r'^2)}_{Q_{zz}}$$

Es ist praktisch hier mit Karthesischen Ko. zu arbeiten und zu definieren:

$$Q_{\alpha\beta} = \int d^3r' \, \varrho(\vec{r}') \left(3 r'_\alpha r'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}\right) \quad ; \quad \begin{array}{l} \alpha,\beta = x,y,z \\ \text{bzw. } 1,2,3 \end{array}$$

Tensor des Quadropolmoments $\overleftrightarrow{Q}$

$\rightarrow$ Vergleiche Trägheitstensor $\vartheta_{\alpha\beta} = \int d^3r' \varrho(\vec{r}') \left(\delta_{\alpha\beta} r'^2 - r'_\alpha r'_\beta\right)$

Der Tensor $\overline{Q}$ ist so zu definieren, dass $\text{Spur}(\overline{Q}) = 0$

Name: Man braucht 4 Punktladungen, um die allgemeinste Form von $\overline{Q}$ (ohne Gesamtladung u. ohne Dipolmoment) zu erhalten.

Eigenschaften:

- Symmetrische 3x3 Matrix
- In passenden KO-Systemen diagonal
- $\text{Spur}(\overline{Q}) = 0 \rightarrow$ nur zwei Q_α sind unabhängig

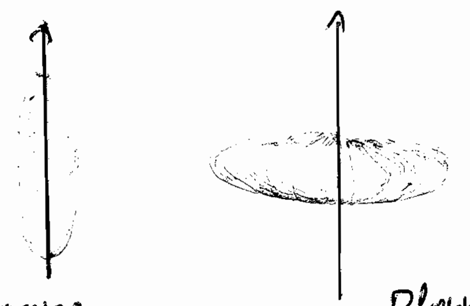
Sezialfälle:

- ϱ Kugelsymmetrisch: $Q_1 = Q_2 = Q_3 \rightarrow Q_\alpha = 0$, denn $\text{Spur}(\overline{Q}) = 0$
- ϱ rotationssymmetrisch um z-Achse $\rightarrow Q_1 = Q_2$

$$\overline{Q} = \begin{pmatrix} -Q/2 & & \\ & -Q/2 & \\ & & Q \end{pmatrix}$$

$\overline{Q}$ ist durch eine Größe festgelegt

Sei z.B. ϱ = konst. und rot. symm. um z-Achse, dann gibt es zwei einfache Fälle:



Zigarre
$Q > 0$

Pfannkuchen
$Q < 0$

Anwendungen:

- Kernphysik: Q-Moment von Kernen
  ↳ Übung
- Atomphysik: Q-Moment der Ladungsverteilung in der Elektronenhülle → Übung
- Geophysik: Q-Moment der Massenverteilung der Erde

10. 11. 05

$$Q_{\alpha\beta} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \left(3 r_\alpha' r_\beta' - r'^2 \delta_{\alpha\beta} \right)$$

Mißt Abweichung der Ladungsverteilung von der Kugelsymmetrie

Potential:

$$\phi(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}}_{\sim \frac{1}{r}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}}_{\sim \frac{1}{r^2}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\alpha,\beta} Q_{\alpha\beta} \frac{r_\alpha r_\beta}{r^5}}_{\sim \frac{1}{r^3}} + \dots$$

Speziell für rotationssymm. Ladungsverteilung:

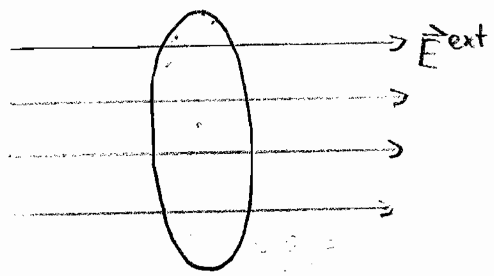
$$\overline{Q} = \begin{pmatrix} -Q/2 & & \\ & -Q/2 & \\ & & Q \end{pmatrix}$$

wird der Q-Term

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \frac{1}{r^3} P_2(\cos\vartheta)$$

Beachte: Die Multipolmomente hängen vom Bezugspunkt ab!
Nur das niedrigste nicht verschwindene Moment ist unabhängig

Das Dipolmoment wird 0, wenn man in den Ladungsschwerpunkt geht.



(5) Wechselwirkung mit <u>äußeren</u> Feldern

Ladungsverteilung in langsam variierenden Feld

Potential:

$$\phi^{ext}(\vec{r}) \cong \phi^{ext}_{(0)} + \sum_{\alpha}\left(\frac{\partial \phi^{ext}}{\partial r_\alpha}\right)_0 r_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\underbrace{\left(\frac{\partial^2 \phi^{ext}}{\partial r_\alpha \partial r_\beta}\right)_0}_{-\left(\frac{\partial E_\alpha^{ext}}{\partial r_\beta}\right)_0} r_\alpha r_\beta$$

$$\rightarrow \phi^{ext}_{(\vec{r})} \cong \phi^{ext}_{(0)} - \vec{r}\cdot\vec{E}^{ext}_{(0)} - \frac{1}{6}\left(\sum_{\alpha,\beta}\left[3 r_\alpha r_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}\right]\left(\frac{\partial E_\alpha^{ext}}{\partial r_\beta}\right)_0\right)$$

Das gibt die WW-Energie

$$W = \int \rho(\vec{r})\,\phi^{ext}_{(\vec{r})}\, d^3r$$

$$= q\cdot\phi^{ext}_{(0)} - \vec{p}\cdot\vec{E}^{ext}_{(0)} - \frac{1}{6}\sum_{\alpha,\beta} Q_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial E_\alpha^{ext}}{\partial r_\beta}\right)_0$$

Ladung × Potential   Dipolm. × Feld   Quadropoltensor × Feldgradient

Wenn $\vec{E}^{ext}$ konstant, gibt $Q_{\alpha\beta}$ keinen Beitrag

9. Stabilität eines geladenen Tropfens

Berühmtes Problem in
- Metallphysik (Rayleigh 1877)
- Kernphysik (Meitner, Frisch, Bohr, Wheeler 1939)

(1) Situation

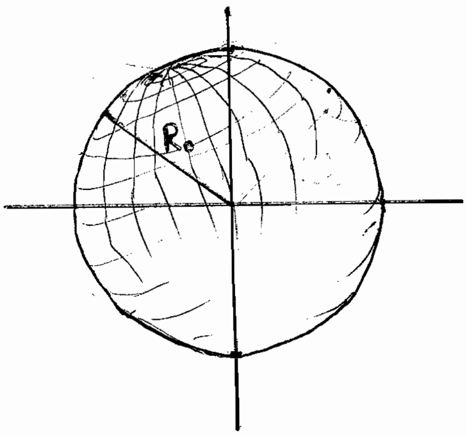
Gegeben ist eine Substanz, die aus geladenen Teilchen besteht und die durch nicht elektrische Kräfte zusammengehalten wird.

→ Zwei Tendenzen:
- Coulomb-Abstoßung will die versch. Teile des Tropfens voneinander entfernen
- Die anderen Kräfte geben eine Oberflächenspannung, welche die Oberfläche möglichst klein haben will.

Welcher Effekt ist stärker?

Man betrachtet kleine Abweichungen von der Kugelgestalt und die dabei auftretende Energie

(2) Beschreibung



Es lässt sich schreiben:

$$R(\vartheta,\varphi) = R_0 \cdot \left(1 + \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\right)$$

Kleine Abweichung: $a_{lm} \ll 1$

Im weiteren werden nur quadrat. Terme in a_{lm} betrachtet.

(3) Energien:

Oberflächenenergie:

$$W_O = \gamma \int df$$

Coulomb-Energie:

$$W_C = \frac{1}{2}\int d^3r\, \rho(\vec{r})\, \phi(\vec{r})$$

wobei $\rho(\vec{r}) = \rho_0$ im Tropfen

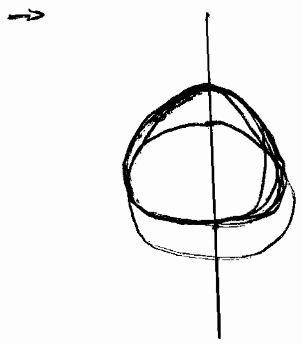
Ergebnis der Rechnungen:

$$\Delta W = \frac{1}{2}\sum_{\ell,m}\Big\{\underbrace{\gamma R_0^2\cdot(\ell-1)(\ell+2)}_{\text{stets positiv!}} \underbrace{- \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{2\pi}\frac{Q^2}{R}\left(\frac{\ell-1}{2\ell+1}\right)\Big\}|\alpha_{\ell m}|^2}_{\text{stets negativ!}}$$

Beiträge von den verschiedenen (ℓ, m) addieren sich

$\ell = 0$ kommt nicht vor

$\ell = 1$ " " "

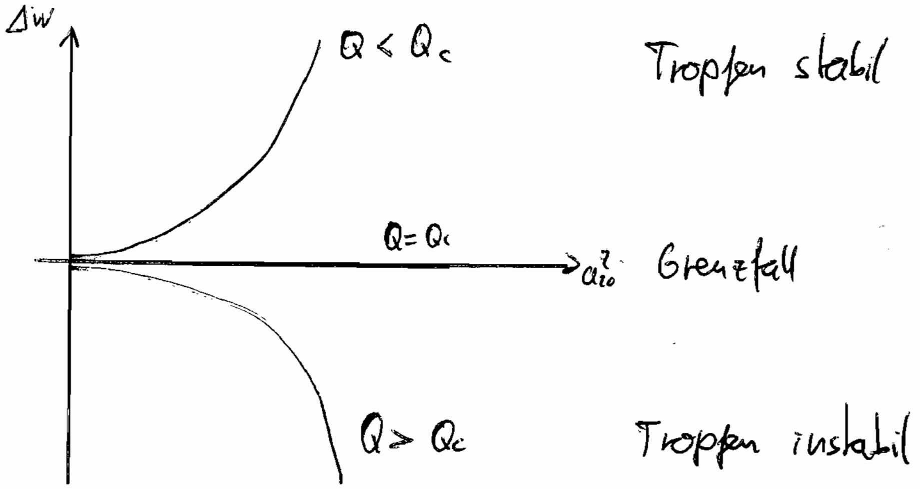


Kugel wird nur verschoben!

$\Rightarrow$ $\ell = 2$ ist erster Term, der vorkommt

Wenn nur $\ell = 2$:

$$\Delta W = \frac{1}{2}\Big\{\gamma R_0^2\, 4 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{2\pi}\frac{Q^2}{R_0}\left(\frac{1}{5}\right)\Big\}\alpha_{20}^2$$



15.11.05

Kritischer Wert für Q

$$\underbrace{4\pi R_0^2 \gamma}_{\text{Oberflächenenergie d. Kugel}} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3}{10} \frac{Q_c^2}{R_0}}_{\text{halbe Coulomb-Energie der geladenen Kugel}}$$

Anwendung auf Atomkern:

Z Ordnungszahl $\longleftrightarrow$ Q

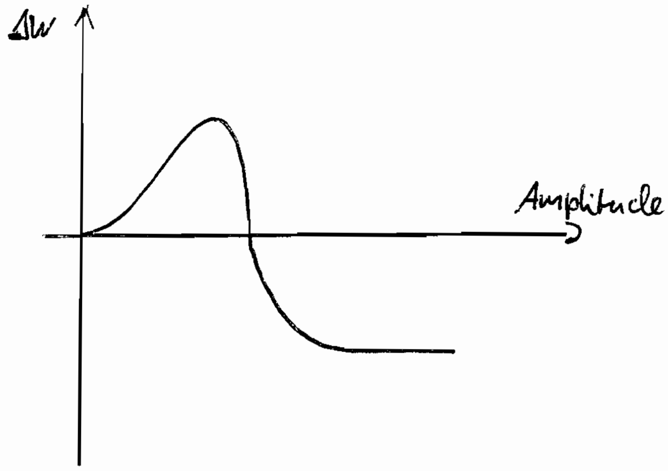
A Massenzahl $\longleftrightarrow$ R_0

Zahlen eingesetzt gibt:

$$\left(\frac{Z^2}{A}\right)_c \cong 50$$

- Wenn $Z^2/A > 50$, ist der Kern instabil gegen kleine Verzerrungen.
- Uran ${}^{92}U^{238}$ $\rightarrow$ $\frac{Z^2}{A} \cong 35$ stabil!
- Aber man kann auch große Verzerrungen anschauen. Extremfall: Kugel in zwei kleine Kugeln aufteilen, dann genügt ein kleinerer Wert für Z^2/A (nämlich ~ 18)

- Schematisch



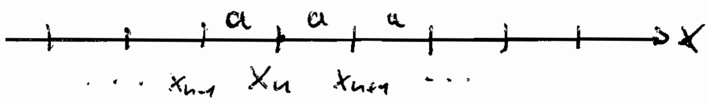
Anmerkung: Wenn man auch noch E_{kin} ausrechnet, kann man die Schwingungen einer solchen Kugel diskutieren.

10. Ergänzungen

(1) Numerische Lösung von Potentialproblemen

Hier muss man das Problem diskretisieren, d.h. den Raum in ein Raster unterteilen

Beispiel: 1D



$$\phi'' \to \frac{\left[\frac{\phi(x_{n+1}) - \phi(x_n)}{a}\right] - \left[\frac{\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})}{a}\right]}{a}$$

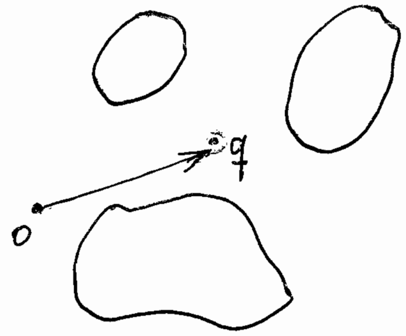
Laplace:

$$\phi(x_{n+1}) + \phi(x_{n-1}) - 2\phi(x_n) = 0$$

Anschauliche Bedeutung:
Wert bei x_n ist das Mittel zwischen x_{n+1} u. x_{n-1}

Analog in 2D → Übung

(2) Greensche Funktion



Mit Punktladung ist zu lösen

$$-\Delta\phi = \rho/\varepsilon_0 = \frac{q}{\varepsilon_0}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

d.h. man hat im wesentlichen zu lösen

$$-\Delta G = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \quad ; \; G: \text{Greensche Funktion}$$

mit den RB $\phi = \text{const}$ auf den Leitern

(3) Elektrische Energie

Punktladungen q_i an Orten $\vec{r}_i$

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}$$

Für kontinuierliche Ladungsverteilung

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{2}\int d^3r\, d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r})\,\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3r\, \underbrace{\rho(\vec{r})}_{-\varepsilon_0\Delta\phi(\vec{r}) = -\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi)}\,\phi(\vec{r})$$

Partiell integr.: $W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int d^3r\,(\vec{\nabla}\phi)^2$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\int d^3r\,|\vec{E}(\vec{r})|^2$$

Also kann man

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\vec{E}|^2$$

als Energiedichte des elektrischen Feldes interpretieren

Diese Energiedichte tritt auch für eine <u>einzelne</u> Ladung auf („Selbstenergie" der Ladung)

Für Punktladung:

$$E \sim \frac{1}{r^2}$$

$$W \sim \int dr \cdot r^2 \cdot \frac{1}{r^4} = \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{r}\Big|_0^\infty = \infty$$

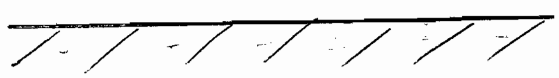
Also ist W hier divergent

Für geladene Kugel mit Radius a und Gesamtladung Q:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3}{5} \frac{Q^2}{a}$$

Die Energiedichte läßt sich auch als Kraft / Fläche = Druck od. Sog interpretieren

Beispiel: Geladene Metalloberfl.



→ Sog, der die Fläche nach oben zieht

II. Dielektrika

11. Polarisierte Körper

(1) Situation

Substanz – ohne „freie" Ladungen
– mit polarisierten Atomen / Molekülen
– nur Dipolmomente wichtig -Ot

Verwendet wird eine makroskopische Beschreibung durch gemittelte Größen

Ursache der Polarisation wird später diskutiert

Beschreibung durch:

$\vec{P}(\vec{r})$ = elektrische Polarisation = $\frac{\text{Dipolmoment}}{\text{Volumen}}$

$\Rightarrow \vec{P}(\vec{r})\, d^3r$ = Dipolmoment des Volumens d^3r

$$\Rightarrow \phi_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\vec{P}(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$\Rightarrow$ Potential durch das Dipolmoment

17. 11. 05

$$\Rightarrow \phi_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\vec{P}(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \ldots \int d^3r' \, \vec{p}(\vec{r}) \, \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \vec{\nabla}' \left(\frac{\vec{P}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)}_{\text{Gauß verwenden}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\nabla} \vec{P}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \phi_p(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, (-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')) \cdot \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\text{Volumenbeitrag}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\vec{f}' \, \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\text{Oberflächenbeitrag}}$$

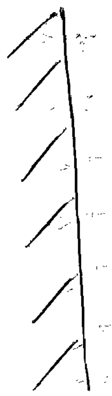
Eine örtlich variierende Polarisation entspricht also einer Volumenladungsdichte

$$\rho_p(\vec r) = -\vec\nabla \cdot \vec P$$

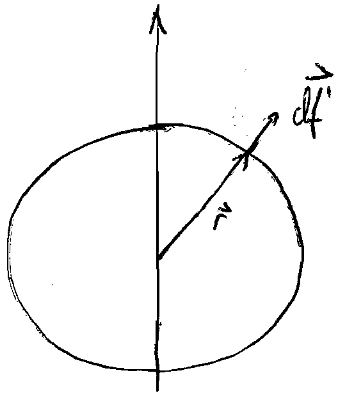
sowie einer Oberflächenladungsdichte

$$\sigma_p(\vec r) = P_n(\vec r)$$

Beispiel Fläche



Beispiel Kugel



(2) Beispiel: Homogen polarisierte Kugel
Oberfläche sei infinitesimal innerhalb der Kugel

$\vec P = \text{const} \Rightarrow$ kein Volumenbeitrag

$$\vec{df}' \cdot \vec P' = df' \cdot P_n' = df' \cdot P' \cos\vartheta' = a^2 \cdot d\Omega' \cdot P \cdot \cos\vartheta'$$

Sei $r < a$ (im Inneren der Kugel) dann gilt:

$$\phi_P(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\sum_{l,m} \frac{r^l}{a^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \int d\Omega' \, a^2 P \underbrace{\cos\vartheta'}_{\sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\vartheta',\varphi')} Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi')}_{\Rightarrow \text{ nur } l=1,\ m=0}$$

$$= \frac{P}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a^2}{a^2} r \, \frac{4\pi}{3} \cdot \cos\vartheta$$

$$= \frac{P}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4\pi}{3} z$$

Elektrisches Feld:

$$\vec{E}_P = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{4\pi}{3}\cdot\vec{P}$$

Also ist das Feld durch $\vec{P}$ in der Kugel ebenfalls homogen und antiparallel zu $\vec{P}$

Im Außenraum erhält man ein Dipolfeld.

(3) Allgemeinere Körper

Sei $\vec{P}$ im Innern wieder homogen. Dann ist $\vec{E}_P$ im allgemeinen nicht homogen, außer wenn es sich um einen Ellipsoid handelt.

Für einen Ellipsoiden gilt, wenn $\vec{P}$ entlang einer Achse

$$E_\alpha = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} N_\alpha P_\alpha \quad , \quad \alpha = 1,2,3$$

N_α: geometrischer Faktor („Entelektrisierungsfaktor")

→ Auch wenn $\vec{P}$ nicht in Achsenrichtung zeigt, ist $\vec{E}_P$ homogen ⇝ Übung

Es gilt:

$$\sum_\alpha N_\alpha = 4\pi$$

Beweis: Aus ϕ_P-Formel folgt:

$$\vec{E}_P = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\vec{f}\,'\cdot\vec{P}\,'\;\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)$$

$$= +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\vec{f}\,'\cdot\vec{P}\;\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)$$

Schreibe in Komponenten

$$E_{p\alpha}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_\beta N_{\alpha\beta}(\vec{r}) \cdot \vec{p}$$

mit

$$N_{\alpha\beta} = -\int df'_\beta \cdot \nabla'_\alpha \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Es folgt für die Spur

$$Sp(\bar{N}) = \sum_\alpha N_{\alpha\alpha} = -\int \left(\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{f}' \quad \Big\} \text{Gauß}$$

$$= -\int \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)}_{-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')} d^3r'$$

$$= 4\pi$$

Konsequenzen der Summenregel:

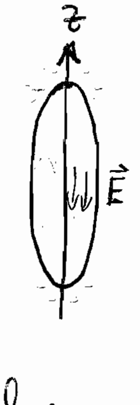
(a) Kugel: Symmetrie $N_x = N_y = N_z = N$

$$3N = 4\pi \rightsquigarrow N = \frac{4\pi}{3}$$

(b) Langgestrecktes Rot. ellipsoid: $N_x = N_y \neq N_z$

$$\rightsquigarrow 2N_x + N_z = 4\pi$$

„Zigarre"



Hier ist N_z klein, weil die Pol. ladungen weit auseinander sitzen

$$\to N_z \cong 0 \rightsquigarrow N_x = N_y = 2\pi$$

→ Pfannkuchen gerade umgedreht

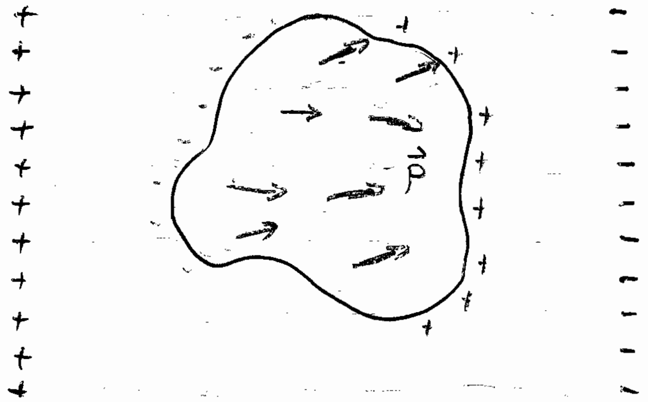
Es gibt Formeln für die N's bei Ellipsoiden

→ Becker / Sauter

für die Zigarre $N_z \cong 4\pi \frac{\ln 2\delta}{\delta^2}$; $\delta = \frac{c}{a} \ll 1$

12. Polarisation im Feld

(1) Situation



22.11.05

(2) Gesamtes Feld in der Substanz

$$\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_p$$

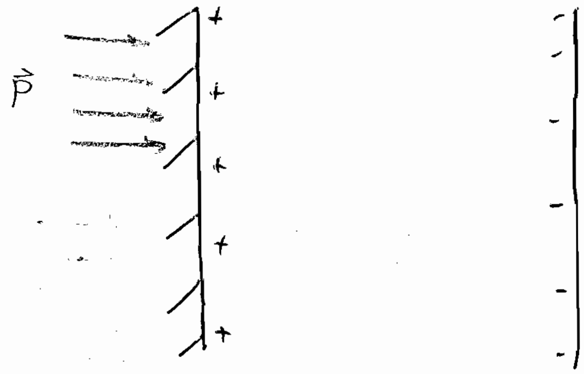
$$\rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_{ext}}_{\rho/\varepsilon_0} + \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_p}_{\rho_p/\varepsilon_0} \qquad \rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

$$= \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla}\underbrace{(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})}_{=:\vec{D}} = \rho \qquad \text{2. Maxwell Gleichung}$$

Das Feld $\vec{D}$ ist so konstruiert, dass es nur an den externen („wahren", „freien") Ladungen entspringt

Beispiel: Ebene Grenzfläche:



$\vec{D}$ ist innen und außen gleich!

D lässt sich messen (Plattenkondensator mit Dielektrikum)

(3) Materialeigenschaften

Bisher kennen wir $\vec{P}$ noch nicht

Wir müssen sagen, wie $\vec{P}$ entsteht.

Zunächst entsteht es durch E_{ext}, aber sobald $\vec{P} \neq 0$

$\to \vec{E}_P \neq 0 \Rightarrow$ das äußere Feld wird modifiziert, daher schreibe:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \overline{\chi} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

Linearer Zusammenhang, i.a. anisotrop, d.h. $\overline{\chi}$ ist ein Tensor. $\overline{\chi}$ enthält die Information über das Material.

Dann ist (wenn $\overline{\chi} = \chi$, also skalar)

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ &= \varepsilon_0 \vec{E} + \overline{\chi} \cdot \vec{E} \\ &= \underbrace{\varepsilon_0 \left(1 + \frac{\overline{\chi}}{\varepsilon_0}\right)}_{\varepsilon \text{ Dielektrizitätskonstante}} \cdot \vec{E}\end{aligned}$$

(4) Beispiel: Ellipsoid im Feld

Innen: $\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \underbrace{\vec{E}_P}_{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot N \cdot \underbrace{\vec{P}}_{\overline{\chi} \cdot \vec{E}}}$ Feld in Achsenrichtung

Das gibt

$$\vec{E} = \frac{1}{1 + \frac{\overline{\chi}}{4\pi\varepsilon_0} N} \vec{E}_{ext} \qquad \overline{\chi} = \chi$$

$$\vec{P} = \frac{\chi}{1 + \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0} N} \vec{E}_{ext}$$

Schwächung von E_{ext} durch N (Geometrie) und χ (Materialeigenschaft) bestimmt.

Plattenkondensator entspricht flachem Pfannkuchen:

$$N = 4\pi$$

$$\rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{1 + \frac{\chi}{\varepsilon_0}} \vec{E}_{ext} = \frac{1}{\varepsilon} \vec{E}_{ext}$$

$$\rightarrow \quad \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{1}{\varepsilon} E_{ext} = \varepsilon_0 \vec{E}_{ext} \quad \text{innen}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_{ext} \quad \text{außen}$$

(5) Allgemeine Gleichungen für Dielektrika

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \qquad \text{Wirbel}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \qquad \text{Quellen}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \qquad \text{Materialbeziehung}$$

$$\rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

Eingesetzt ergibt sich:

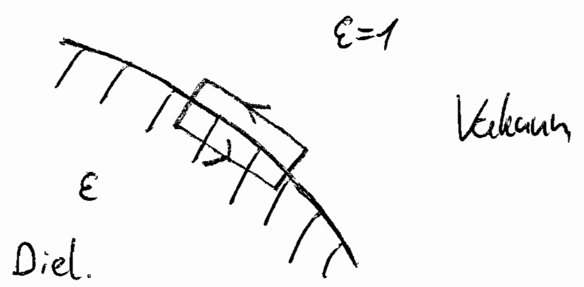
$$-\vec{\nabla}(\varepsilon\varepsilon_0 \nabla\phi) = \rho$$

$$\rightarrow \quad -\Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

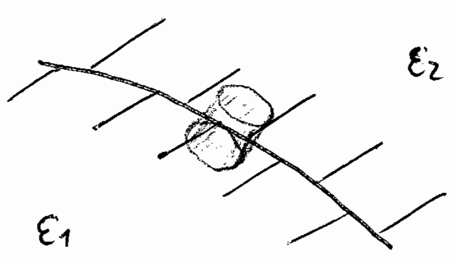
$\rightarrow$ Punktladung im DK:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{q}{r}$$

Randbedingungen an Grenzflächen:



bzw.:



$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \leftrightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$; Integriere entlang der Grenzfläche

$\Rightarrow$ $\boxed{E_t \text{ stetig}}$ (innen und außen gleich!)

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \leftrightarrow \oint_{\circ} \vec{D} \cdot d\vec{f} = 0$ wenn $\rho = 0$; Integriere über kl. Zylinder

$\Rightarrow$ $\boxed{D_n \text{ stetig}}$

„Brechungsgesetz" der Feldlinien:

$E_t = E_t'$

2 Gleichungen $\rightarrow$ E u. E'

Es ist:
$$\left.\begin{aligned} D_n &= \varepsilon \varepsilon_0 E_n = \varepsilon_0 E_n \\ D_n' &= \varepsilon' \varepsilon_0 E_n' \end{aligned}\right\} \quad E_n' = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{<1} E_n$$

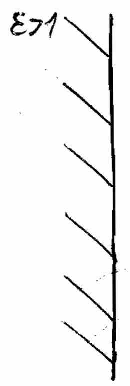
$<1 \Rightarrow$ Brechung vom Lot weg

Beim Eintritt ins Material werden die Feldlinien vom Lot weg gebrochen.

Für $\varepsilon \to \infty$ geht $E_i \to 0$ und man erhält den Fall des Metalls zurück.

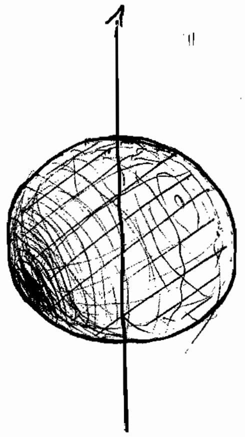
(6) Beispiel

Punktladung und dielektrischer Halbraum



$\to$ Übung

Dielektrische Kugel in einem homogenen Feld



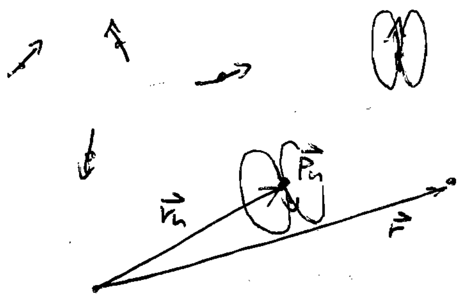
$$\phi(r) = \sum_\ell A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta) \quad \text{innen}$$

$$\phi(r) = \sum_\ell \left[B_\ell r^\ell + C_\ell r^{-(\ell+1)} \right] P_\ell(\cos\theta) \quad \text{außen}$$

13. Lokale Felder

Ziel: Die makroskop. Größen χ, ε aus mikroskopischen Überlegungen zu gewinnen.

(1) Betrachte Substanz als Ansammlung von Punkt-dipolen, Momente $\vec{p}_n$, Orte $\vec{r}_n$



Feld am Ort $\vec{r}$:

$$\vec{E}_p(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_n \left[\frac{\vec{p}_n}{|\vec{r}-\vec{r}_n|^3} \, 3 \cdot \frac{\vec{p}_n \cdot (\vec{r}-\vec{r}_n)}{|\vec{r}-\vec{r}_n|^5} (\vec{r}-\vec{r}_n) \right]$$

Welches Feld „sieht" ein herausgegriffener Dipol?

A: Man muss sein eigenes Feld aus der Summe weglassen.

Also:

$$\vec{E}_{lok} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_p'$$

$$\vec{E}_{lok} = \vec{E}_{ext} + \sum_{n\neq 0} \vec{E}^{(n)}_{Dip} \qquad \text{wenn Dipol bei } \vec{r} = 0$$

(2) Berechnung von $\vec{E}_{lok}$

Zerlege die Summe in Beiträge

- aus großer Entfernung $\longrightarrow$ Kontinuumsnäherung
- aus der Umgebung $\longrightarrow$ Summe (diskret)

$$\sum_{r_n \neq 0} E^{(n)}_{dip} = \sum_{0<r_n<R} \vec{E}^{(n)}_{Dip} + \int_{r_n>R} \vec{E}^{(n)}_{Dip}$$

$$\sum_{r_n \neq 0} \vec{E}^{(n)}_{Dip} = \left[\sum_{0<r_n<R} \vec{E}^{(n)}_{Dip} - \int_{0<r_n<R} \vec{E}^{(n)}_{Dip} \right] + \underbrace{\int_{0<r_n} \vec{E}^{(n)}_{Dip}}_{\text{Integration über gesamte Substanz}}$$

Kam schon vor!

Bisher haben wir das Feld

$$\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \int_{r_n>0} E^{(n)}_{Dip} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_p$$

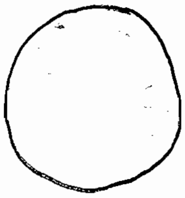
betrachtet.

Vergleich mit $\vec{E}_{lok}$ zeigt:

$$\vec{E}_{lok} = \underset{\text{„mittleres Feld"}}{\vec{E}} + \underset{\text{Berücksichtigung der lokalen Effekte}}{\left[\sum_{0<r_n<R} \vec{E}^{(n)}_{Dip} - \int_{0<r_n<R} \vec{E}^{(n)}_{Dip} \right]}$$

(3) Auswertung

Innerhalb der Kugel werden die p's näherungsweise gleich sein → arbeite mit konstantem $\vec{P}$



$$\rightarrow \int E^{(n)}_{Dip} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{4\pi}{3}\,\vec{P}$$

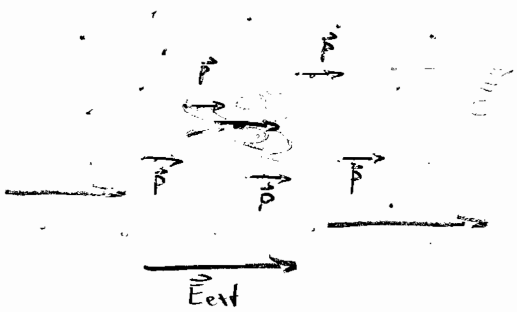
$\sum\limits_{0<r_n<R} \vec{E}^{(n)}_{Dip}$: Man braucht die Orte $\vec{r}_n$

- Kristall, z.B. kubisches Gitter
  → $\sum = 0$! → Übung
  Ebenso für das Diamantgitter
- Flüssigkeiten, Gase,
  → Mittelung über die Orte $\vec{r}_n$
  ↳ liefert ebenfalls $\sum = 0$

In beiden Fällen ist also

$$\vec{E}_{lok} = \vec{E} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{4\pi}{3}\,\vec{P}$$

Bild:



$\vec{E}_{lok} > E$

$\vec{E}$: Äußer. Feld vermindert um die Beiträge aller Dipolfelder

$\vec{E}_{lok}$: Hier fehlt der Beitrag eines Dipols! Es ist <u>weniger</u> vermindert.

(4) Formel für χ bzw. ε

Schreibe:

$$\vec{p} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{atomare Polarisierbarkeit}}}{\alpha} \cdot \vec{E}_{lok}$$

Ferner:

$$\vec{P} = n \cdot \vec{p} \quad ; \quad n = \frac{\#}{Vol}$$

$$= n \alpha E_{lok}$$

$$= n \alpha \left(\vec{E} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4\pi}{3} \vec{P} \right)$$

$$\rightarrow \vec{P} = \underbrace{\left(\frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4\pi}{3}} \right)}_{\chi} \vec{E}$$

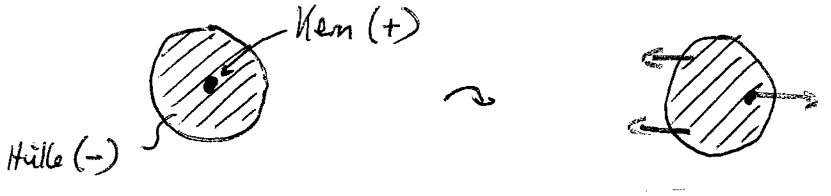
mit $\varepsilon = 1 + \frac{\chi}{\varepsilon_0}$ folgt:

$$\rightarrow \varepsilon = \frac{1 + \frac{2n\alpha}{3\varepsilon_0}}{1 - \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0}} \quad \leadsto \quad \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$$

Clausius-Mossotti-Formel (~ 1870)

(5) Mechanismen für α

- Moment wird durch Umverteilung der Ladung erzeugt



- Permanente Dipolmomente werden im Feld ausgerichtet (gegen die Temperaturbewegung)

$$\alpha \sim \frac{p^2}{k_B T}$$

29. 11. 05

14. Energien mit Dielektrika

(1) Feldenergie

Diel. Medium, Ladungen $\rho(\vec{r})$

Ändere

$$\rho(\vec{r}) \rightarrow \rho(\vec{r}) + \delta\rho(\vec{r})$$

$$\rightarrow \quad \delta W = \int d^3r \; \phi(\vec{r}) \cdot \underbrace{\delta\rho(\vec{r})}_{\vec{\nabla}(\delta\vec{D})}$$

$$= \int d^3r \left[\vec{\nabla}(\phi \cdot \delta\vec{D}) - \delta\vec{D} \cdot \underbrace{\vec{\nabla}\phi}_{-\vec{E}}\right]$$

$$\delta W = \underbrace{\int_{\text{Oberfl.}} d\vec{f} \cdot (\phi\,\delta\vec{D})}_{} + \int d^3r \; \vec{E} \cdot \delta\vec{D}$$

verschwindet, wenn Oberfl. $\rightarrow \infty$ und $\phi\,\delta\vec{D}$ schneller als $1/r^3$ abfällt

Dann bleibt:

$$\delta W = \int d^3r \; \vec{E} \cdot \delta\vec{D}$$

Dies lässt sich aufintegrieren, wenn der Zusammenhang zwischen E u. D. bekannt ist.

Wenn

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\rightarrow \delta \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \delta \vec{E}$$

$$\rightarrow W = \int d^3r \int_0^E \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \delta \vec{E}$$

$$= \int d^3r \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r})$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r \, \vec{D} \cdot \vec{E}$$

Die Energiedichte ist also

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

Im Vakuum gilt $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\rightarrow w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \qquad \text{(wie früher)}$$

Wenn ε ein Tensor ist, gilt

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \overline{\varepsilon} \cdot \vec{E}$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \sum_{\alpha, \beta} \varepsilon_{\alpha\beta} E_\alpha E_\beta$$

Hier geht nur der symmetrische Teil der Matrix $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ein.

(2) Energie mit und ohne Dielektrikum

Sei $\rho(\vec{r})$ <u>fest</u>

Feld im Vakuum sei $\vec{E}_0$ bzw. $\vec{D}_0 = \varepsilon_0 \vec{E}_0$

Dielektrikum einbringen. Dann seien die Felder $\vec{E}$ bzw. $\vec{D}$

$$\rightarrow \quad \Delta W = \frac{1}{2} \int d^3r \left(\vec{E} \cdot \vec{D} - \vec{E}_0 \cdot \vec{D}_0 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r \left(\vec{E} \cdot \vec{D}_0 - \vec{D} \cdot \vec{E}_0 \right) + \frac{1}{2} \int d^3r \left(\vec{E} + \vec{E}_0 \right) \left(\vec{D} - \vec{D}_0 \right)$$

2. Integral: Setze $(\vec{E} + \vec{E}_0) = -\vec{\nabla} \tilde{\phi}$

$$\rightarrow \quad \int d^3r \, \vec{\nabla} \tilde{\phi} \, (\vec{D} - \vec{D}_0) = \int d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \left(\tilde{\phi} \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0) \right)$$

$$- \int d^3r \, \tilde{\phi} \, \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0)}_{=0, \text{ wegen } \rho \text{ in beiden Fällen gleich}}$$

durch Umschreibung in ein Oberfl.integral folgt:

$$= \int d\vec{f} \cdot \underbrace{\tilde{\phi} \, (\vec{D} - \vec{D}_0)}_{\text{nimmt ab in großer Entfernung } \rightarrow 0} = 0$$

Es bleibt:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int d^3r \left(\varepsilon_0 \vec{E}_0^t \vec{E} - \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}_0^t \vec{E} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \int d^3r \, \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E}_0^t \vec{E}$$

$$= -\frac{1}{2} \int d^3r \, \underbrace{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E}}_{\vec{P}} \cdot \vec{E}_0$$

$$= -\frac{1}{2}\int d^3r\, \vec{P}(\vec{r})\cdot\vec{E}_0(\vec{r})$$ | Integral geht nur über das Dielektrikum

Beachte den Faktor $\frac{1}{2}$, entspricht der Tatsache, dass die Pol. $\vec{P}$ erst im Feld erzeugt wird.

Anmerkung: In den Überlegungen wurde stillschweigend ε = Konst. benutzt. Da ε von der Temp. T abhängt, nimmt man T = Konst. an. Das bedeutet, dass δW bzw. W die Änderungen der „freien Energie" sind.

III Magnetostatik

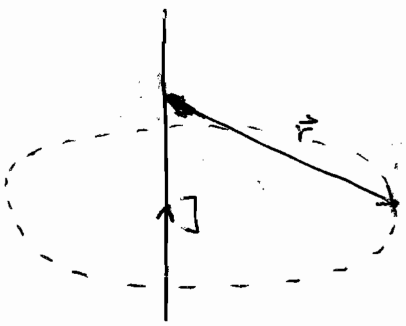
§15. Magnetfelder im Vakuum

(1) Einführung von $\vec{B}$

Oersted 1819, Biot, Savart 1820, Ampère 1820-25

$$\rightarrow d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

Beitrag des Stücks $d\vec{l}$ am Ursprung zum Magnetfeld am Ort $\vec{r}$



vgl. Coulomb-Gesetz

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Unterschied:

- Vektorcharakter
- Ströme müssen stationär fließen (da Statik)

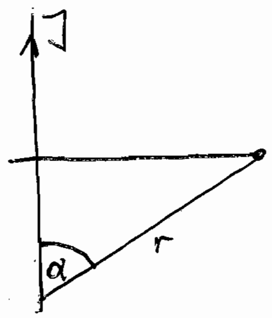
Kontinuitätsgleichung

$$\underbrace{\frac{\partial \varrho}{\partial t}}_{=0 \text{ bei Statik}} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

→ Keine Quellen und Senken für $\vec{j}$

(2) Vergleich

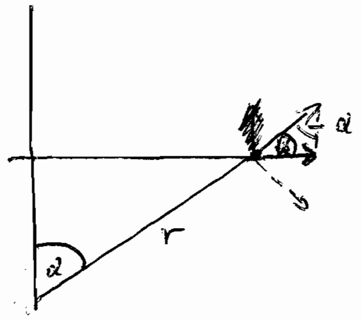
B-Feld eines geraden Drahtes:



$$B_\varphi = B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz \cdot r \cdot \sin\alpha}{r^3}$$

gleiches Integral

Elektr. Feld eines geladenen Drahtes:



$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} dz \; r \sin\alpha / r^3$$

σ = Ladung pro Länge

→ $B = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I}{R}$; $E = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R}$

(3) Quellen und Wirbel von $\vec{B}$

Wenn im ganzen Raum Ströme fließen, ist mit der Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ (Strom / Fläche)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, d^3r'$$

Verwendung von

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\rightarrow \vec{j}(\vec{r}\,') \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) - \underbrace{\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \left(\vec{\nabla} \times \vec{j}(\vec{r}\,') \right)}_{=0}$$

Daher gilt:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, d^3r' \right]$$

d.h. $\vec{B}$ hat die Form:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\rightarrow \underline{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$ $\vec{B}$ ist Quellenfrei

01. 12. 05

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \underbrace{\left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \, d^3r \right)}_{\vec{A}(\vec{r})}$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ Keine Quellen

Zweite Gleichung für $\vec{B}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$
$$= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \qquad \text{allg. Formel}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \underbrace{\left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)}_{-\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}} \vec{j}(\vec{r}') \, d^3r$$

Schreibe:

$$\left(\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \vec{j}(\vec{r}') = \vec{\nabla}' \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \underbrace{\vec{\nabla}' \vec{j}(\vec{r}')}_{=0, \text{ wegen Statik}}$$

Es bleibt:

$$\int \vec{\nabla}' \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) d^3r \underset{(\text{Gauß})}{=} \int_{\text{Oberfl.}} \frac{\vec{j}(\vec{r}') \cdot d\vec{f}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Für festes $\vec{r}$ wähle als Oberfläche eine große Kugel mit Radius R um $\vec{r}$.

$$\rightarrow \frac{1}{R} \int_{\text{Kugel}} \vec{j}(\vec{r}\,')\, d\vec{f}\,' = 0$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Es bleibt:

$$\Delta \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \underbrace{\Delta\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)}_{-4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')} \vec{j}(\vec{r}\,')\, d^3r' = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

Also folgt

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

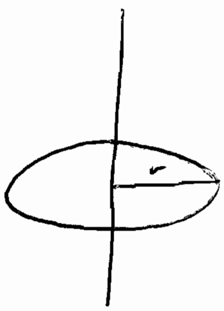
Wirbel von $\vec{B}$ dort, wo Stromdichte $j \neq 0$

Mit Stokes folgt die integrale Form

$$\int_{\text{Fläche}} (\vec{\nabla} \times \vec{B})\, d\vec{f} = \oint_{\text{Rand}} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \underbrace{\mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{f}}_{\text{Strom durch Fläche}} = \mu_0 J$$

$$\rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 J$$

z.B. grader Draht



$$\vec{B}(\vec{r}) \cdot 2\pi r = \mu_0 J$$

$$\leadsto \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} J \frac{1}{r} \quad \text{vgl. (2)}$$

(4) Das Vektorpotential $\vec{A}$

Ist analog zum skalaren Potential ϕ im elektr. Fall

Vergleiche:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, d^3r'$$

Die Existenz von $\vec{A}$ ist mit der Quellenfreiheit von $\vec{B}$ verknüpft.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{man kann immer schreiben} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Das $\vec{A}$ ist jedoch <u>nicht</u> eindeutig!

Wenn

$$\vec{A}\,' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A}\,' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\chi)$$

$\rightarrow$ A' liefert dasselbe $\vec{B}$ wie $\vec{A}$

vgl. skalares Potential:

$$\phi' = \phi + c$$

liefert dasselbe $\vec{E}$ wie ϕ

Folge: Man kann bestimmte Wahlen für $\vec{A}$ treffen.
In unserem Fall erfüllt $\vec{A}$ die Bedingung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Man nennt diese Wahl die „Coulomb-Eichung"

Dann gilt: $-\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$; vgl. Poisson: $-\Delta\phi = \rho/\varepsilon_0$

Jede Karthesische Komponente von $\vec{A}$ erfüllt die Poisson-Gl. (mit $\rho \to j$)

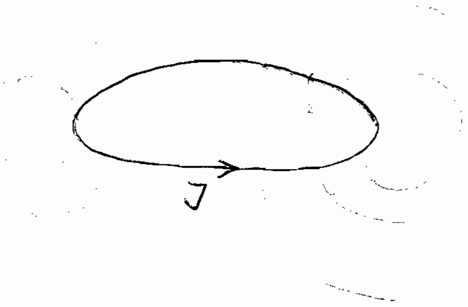
Das Integral

$$\underbrace{\oint \vec{B} \cdot d\vec{f}}_{\text{Fluß von } \vec{B}} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{A})\, df = \oint \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

ist unabhängig von der Eichung

16. Magnetische Dipole

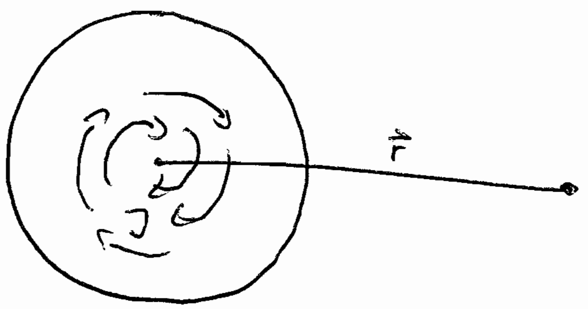
Ampere:



Kreisströme erzeugen Dipolfelder

(1) Wir gehen analog zum elektr. Fall vor. Gegeben sei eine Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$, die in einem Raumgebiet lokalisiert ist.

Gesucht: Vektorpotential und Feld $\vec{B}$ in großem Abstand



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, d^3r'$$

Schreiben

$$\underbrace{\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}'}}} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3}$$

$$A_\alpha(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int j_\alpha(\vec r\,')\,d^3r' + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\vec r\cdot\int \vec r\,' \cdot j_\alpha(\vec r\,')\,d^3r'$$

Verwende $\vec\nabla\cdot\vec j(\vec r) = 0$ und $\psi(\vec\nabla\cdot\vec j) = \vec\nabla(\psi\vec j) - \vec j(\vec\nabla\psi)$

Das liefert:

$$0 = \int \psi(\vec r\,')\,\vec\nabla'\cdot\vec j(\vec r\,')\,d^3r' = \underbrace{\int \vec\nabla'(\psi\cdot\vec j(\vec r\,'))\,d^3r'}_{\underbrace{\int \psi\,\vec j(\vec r\,')\,d\vec f}_{=0 \text{ im Bereich wo } \vec j = 0}} - \int \vec j(\vec r\,')\,\vec\nabla'\psi\,d^3r'$$

Dies wird jetzt verwendet

(a) Wähle $\psi = x'$ $\rightarrow$ $\vec\nabla'\psi = (1,0,0)$

$\rightarrow \int j_x(\vec r\,')\,d^3r' = 0$

Analog $\psi = y'$; $\psi = z'$

$\rightarrow$ 1. Integral für $\vec A$ verschwindet

(b) Wähle $\psi = x'^2$

$\rightarrow \vec\nabla'\psi = (2x',0,0)$

$\rightarrow \int x'\cdot j_x(\vec r\,')\,d^3r' = 0$

(c) Wähle $\psi = x'y'$

$\rightarrow \vec\nabla\psi = (y',x',0)$

$\rightarrow \int (y'j_x + x'j_y)\,d^3r' = 0$

Damit folgt:

$$\vec r\cdot\int \vec r\,' j_\alpha(\vec r\,')\,d^3r' = \sum_\beta r_\beta \int r'_\beta\, j_\alpha(\vec r\,')\,d^3r' = -\sum_\beta r_\beta \int r'_\alpha\, j_\beta(\vec r\,')\,d^3r'$$

$$= \frac{1}{2}\sum_\beta r_\beta \int (r'_\beta j_\alpha - r'_\alpha j_\beta)\,d^3r'$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\vec r\times \underbrace{\int (\vec r\,'\times\vec j(\vec r\,'))\,d^3r'}\Big]_\alpha \quad =: \vec m$$

Also:

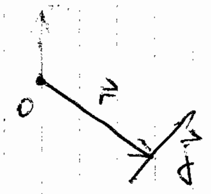
$$\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec m\times\vec r}{r^3}$$

$\vec m$: magnet. (Dipol-)Moment

6.12.05

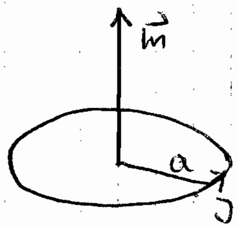
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r' \left(\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')\right) \quad \text{vgl. } \vec{p} = \int d^3r' \, \vec{r}' \rho(\vec{r}')$$



Dimension: $[m] = m^4 \, \frac{A}{m^2}$ = Strom × Fläche

Beispiel: Kreisstrom in der x-y-Ebene



$$m_z = m = \frac{1}{2} a \, J \, 2\pi a = J \pi a^2$$
$$= J \cdot A$$

Magnetfeld:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \Big(\vec{\nabla} \times \big(\underbrace{\vec{\nabla} \tfrac{1}{r}}_{\vec{a}} \times \underbrace{\vec{m}}_{\vec{b}} \big) \Big) \quad ; \quad \frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{r}$$

Verwende:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{b})}_{\substack{=0 \\ \text{weil } \vec{b} = \vec{m} \\ \text{feste Zahl}}} - \vec{b} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{a})}_{\Delta \frac{1}{r} = 0} + \underbrace{(\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a}}_{(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \frac{1}{r}} - \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b}}_{=0}$$

Also:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} (m \cdot \vec{\nabla}) \underbrace{\vec{\nabla} \frac{1}{r}}_{-\frac{\vec{r}}{r^3}}$$

$$\rightarrow \quad B_x = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left(m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} = \frac{1}{r^3} + x(-3)\frac{1}{r^4}\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$\rightarrow \quad \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\vec{m}}{r^3} - \frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})}{r^5}\vec{r}\right)$$

Gleiche Formel wie im elektr. Fall.

→ Nur in großen Abstand, sonst Multipolentw.

Gyromagnetisches Verhältnis

Schreibe: $\vec{j}(\vec{r}) = q \cdot n(\vec{r})\, \vec{v}(\vec{r})$

$$\rightarrow \vec{m} = \frac{q}{2M}\int d^3r' \left(\vec{r}' \times n(\vec{r}')\,\vec{v}(\vec{r}')\cdot M\right)$$

mit M = Masse eines Teilchens

$$\int d^3r' \left(\vec{r}' \times n(\vec{r}')\,\vec{v}(\vec{r}')\,M\right) \hat{=} \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{p}_i)$$

$$\rightarrow \vec{m} = \frac{q}{2M}\cdot\vec{L} \quad , \quad \vec{L} \text{ Drehimpuls}$$

d.h. $\frac{m}{L} = \frac{q}{2M}$

Gilt auch in der Quantenmechanik, wenn es sich um Bahnbewegung handelt, nicht für Spin.

Man kann Formeln des elektr. Falls übertragen, z.B.

$\vec{F} = (\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{B}$ Kraft im inhom. Feld

$W = -\vec{m}\cdot\vec{B}$ Energie im Feld

Magnetische Kräfte

$\vec{F} = J \, d\vec{s} \times \vec{B}$ auf Leiterstück

$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$ Kraft / Volumen

17. Magnetisierte Körper

Disskussion analog zum elektr. Fall.

(1) Vektorpotential u. Magnetisierungsströme

Gegeben sei eine Magnetisierung

$\vec{M}(\vec{r}) \quad \left(\frac{\text{Magn. Dipolmoment}}{\text{Volumen}} \right)$

Vektorpot.:

$$\vec{A}_M(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Verwende Formel für $\vec{\nabla} \times (\psi \vec{a})$

$$\rightarrow \vec{A}_M(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}') - \underbrace{- \int d^3r' \, \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)}_{\text{Oberflächenintegral s. Übung}}$$

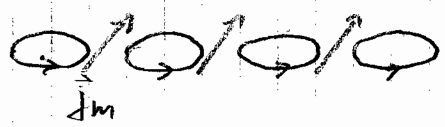
$\vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r})$ lässt sich als Stromdichte lesen

Also ist $\vec{j}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$ die mit der Magnetisierung verknüpfte Stromdichte.

vgl. elektrisch: $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

$\otimes \; \otimes \; \times \; \vec{j}_M$ (in die Ebene hinein)

Alternativ kann man sich $\vec{M}(\vec{r})$ aus Kreisströmen entstanden denken.



(2) Gesamtes Vektorpot. mit äußerem Feld

$$\vec{A} = \vec{A}_{ext} + \vec{A}_M$$

$$\rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\
&= \vec{\nabla} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}_{=0} - \Delta \vec{A} \\
&= -\Delta (\vec{A}_{ext} + \vec{A}_M) \\
&= \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_M) \\
&= \mu_0 (\vec{j} + \vec{\nabla} \times \vec{M})
\end{aligned}$$

Also:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{j} \quad \text{bzw.} \quad \vec{\nabla} \times \underbrace{\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - M \right)}_{= \vec{H}} = \vec{j}$$

Definiert man also

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$$

oder auch:

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right)$$

Das Feld $\vec{H}$ hat also seine Wirbel dort, wo „freie" Ströme fließen.

Randbedingungen an Grenzflächen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad B_n \text{ stetig}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad \rightarrow \quad H_t \text{ stetig, wenn } \vec{j} = 0 \text{ oder}$$

$\vec{j}$ ohne δ-förmigen Beitrag an d. Grenzfläche

(3) Felder in einem Permanentmagneten

$\vec{B}_{ext} = 0$, keine wahren Ströme $\vec{j} = 0$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$$

und $\vec{H}$ entsteht durch $\vec{M} \rightarrow \vec{H}_M$

$\vec{H}_M$ lässt sich schreiben:

$$\vec{H}_M = -\vec{\nabla}\psi = -\vec{\nabla}\phi_M$$

mit einem skalaren Potential ϕ_M

$$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \left[\mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right) \right] = \vec{\nabla} \cdot \left[-\mu_0 \vec{\nabla}\phi_M + \mu_0 \vec{M} \right] = 0$$

$$\rightarrow -\Delta \phi_M = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = \rho_M$$

bzw.

$$\phi_M = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{\rho_M(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

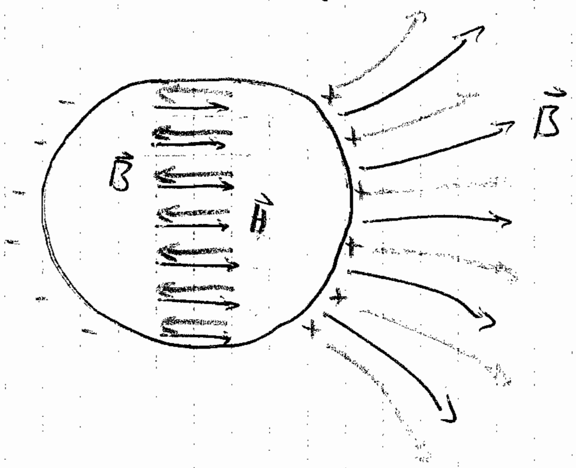
Man muss also nur die elektr. Formeln übertragen

$$\vec{E} \rightarrow \vec{H}$$
$$\vec{P} \rightarrow \vec{M}$$

$\rightarrow$ Ellipsoid, $\vec{M}$ in Achsenrichtung

$$\rightarrow \vec{H} = -\frac{1}{4\pi} \cdot N \cdot \vec{M}$$

N heißt „Entmagnetisierungsfaktor"



8.12.05

Feld $\vec{H}$, $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

In Ellipsoid

$$\vec{H}_M = -\frac{1}{4\pi} N \cdot \vec{M}$$

$$\rightarrow \vec{B}_M = \mu_0 (\vec{H}_M + \vec{M}) = \mu_0 \underbrace{\left(1 - \frac{N}{4\pi}\right)}_{\geq 0} \vec{M}$$

Also hat $\vec{B}$ die Richtung von $\vec{M}$

Speziell: Zigarre: $N \equiv 0 \rightarrow \vec{H}_M \cong 0$

(4) Körper im äußeren Magnetfeld

$$\vec{H} = \vec{H}_{ext} + \vec{H}_M$$

Materialgleichung: Man schreibt

$$\vec{M} = \chi \cdot \vec{H}$$

Dies lässt sich in Experimenten direkt messen.

Für lange Zigarre ist

$$\vec{H} \cong \vec{H}_{ext}$$

und somit von außen einstellbar.

Eingesetzt folgt

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi \vec{H})$$

$$= \mu_0 \underbrace{(1 + \chi)}_{\mu} \vec{H} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

μ: Magnetische Permeabilität

$$\chi > 0 \rightarrow \mu > 1 \quad \text{Paramagnet}$$
$$\chi < 0 \rightarrow \mu < 1 \quad \text{Diamagnet}$$

Für Ellipsoid: (in Achsenrichtung)

$$\vec{H} = \vec{H}_{ext} - \frac{1}{4\pi} N \underbrace{\vec{M}}_{\chi \vec{H}}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \vec{H}_{ext} \frac{1}{1 + \frac{N\chi}{4\pi}}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 (1 + \chi)}{1 + \frac{N\chi}{4\pi}} \vec{H}_{ext} = \frac{1 + \chi}{1 + \frac{N\chi}{4\pi}} \vec{B}_{ext}$$

Wenn $\chi > 0 \rightarrow \vec{B} > \vec{B}_{ext}$ (innen)

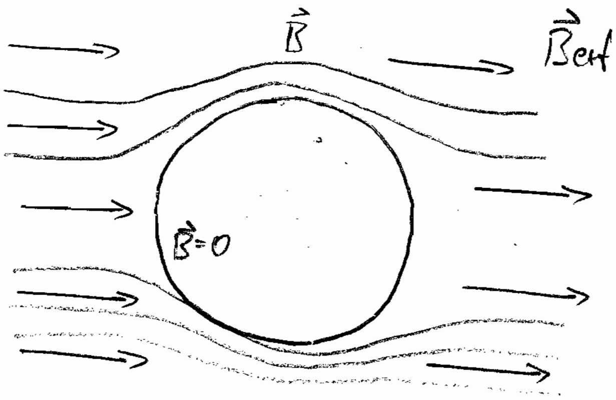
(5) Der ideale Diamagnet

Man kann ein Material im supraleitenden Zustand als Diamagnet ansehen, wo

$$\chi = -1$$
$$\rightarrow \vec{B} = 0$$
$$\rightarrow \vec{H} = -\vec{M}$$

Meissner - Ochsenfeld - Effekt

Entsteht durch Randströme, die das äußere Feld im Inneren genau kompensieren.



→ Schwebeversuche im inhomogenen Feld

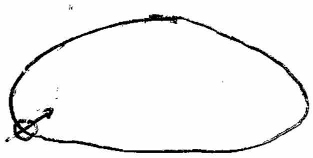
Beachte, dass die Randströme „wahre" Ströme sind, die durch die freien Leitungselektronen entstehen.

IV Induktion

18. Induktionsgesetz

(1) Faradays Experimente

Strom in Leiterschleifen



bei Änderung des magnetischen Flusses

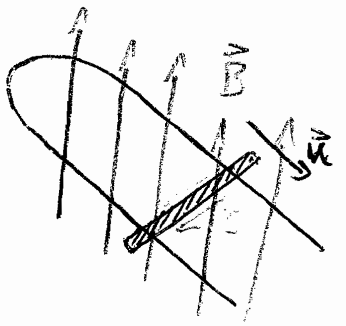
$$J \cdot R = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot d\vec{f}$$

$J \cdot R$ kann man als Ringspannung ansehen

$$J \cdot R = U = \oint \vec{E}\, d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot d\vec{f}$$

Dies wird als allgemeine Aussage angesehen, die auch ohne Draht gilt.

(2) Falls Draht bewegt wird, folgt dies aus der Lorentzkraft



$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{u} \times \vec{B}$$

Wenn man sich auf den Bügel setzt, würde man diese Kraft auf ein elektrisches Feld

$$\vec{E}' = \vec{u} \times \vec{B}$$

zurückführen.

Dann ist

$$\oint \vec{E}' \cdot d\vec{r} = \oint (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}$$

$$= -uB \cdot l$$

$$= -\frac{dx}{dt} B \cdot l = -\frac{d}{dt} (\underbrace{x \cdot B \cdot l}_{\text{Fluss}})$$

$$= \frac{d}{dt} \oint \vec{B} \cdot d\vec{f} = -\dot{\phi}$$

(3) Differentielle Form

Bei fester Schleife ist

$$\underbrace{\oint \vec{E}\cdot d\vec{r}}_{\int (\vec{\nabla}\times\vec{E})\, d\vec{f}} = -\int \left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)\cdot d\vec{f}$$

Gilt für beliebige Schleifen

$$\rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\dot{\vec{B}}$$

Das $\vec{E}$-Feld hat also Wirbel, wenn $\dot{\vec{B}} \neq 0$

Mit $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

$$\rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = -\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Also kann man schreiben

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi$$

bzw.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Beitrag von Ladungen

Beitrag von zeitl. veränderl. Magnetf.

(4) Energie im magnet. Feld

Feld wird durch Strom erzeugt.
Betrachte also Draht, wo Ladungsträger fließen und ein Feld $\vec{E}$ herrscht

Geleistete Arbeit

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$
$$= q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\rightarrow \dot{W} = q \cdot \vec{E} \cdot \vec{v}$$ Zeitl. Änderung d. Energie

Viele Teilchen:

$$\dot{W} = \int d^3r \underbrace{n(\vec{r}) \cdot q \cdot \vec{v}(\vec{r})}_{\vec{j}(\vec{r}) \text{ Ladungsstromdichte}} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

$$\rightarrow \dot{w}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})$$ Zeitl. Änderung d. Energiedichte

Diese mechanische Energie wird ständig in Wärme umgewandelt.

Schreibe:

$$\vec{E} = \vec{E}_{Batt} + \vec{E}_{ind}$$

$$\rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E}_{Batt} + \vec{j} \cdot \vec{E}_{ind}$$

$$\rightarrow \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{E}_{Batt}}_{\text{von Batt. geliefert}} = \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{E}}_{\text{in Wärme umgesetzt}} - \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{E}_{ind}}_{\text{in Magnetfeld}}$$

↳ hieraus folgt die Magnetfeldenergie

13.12.05

$$\vec{j}\cdot E_{ext} = \vec{j}\vec{E} - \vec{j}\cdot\vec{E}_{ind}$$

Also ist $\dot{w}_m = -\int d^3r\, \vec{j}\,\vec{E}_{ind}$

die Änderung der mag. Feldenergie

Einsetzen: $\vec{E}_{ind} = -\frac{\partial A}{\partial t}$

$$\rightarrow \dot{w}_m = \int d^3r\, \vec{j}\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

bzw.

$$\boxed{\delta w_m = \int d^3r\, j\, \delta\vec{A}}$$

Setze ein $j = \vec{\nabla}\times\vec{H}$

$$\rightarrow \delta w_m = \int d^3r\, (\vec{\nabla}\times\vec{H})\cdot\delta A$$

$$\overset{1)}{=} \int d^3r \left[\vec{H}\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}\times\delta\vec{A})}_{\delta\vec{B}} + \underbrace{\vec{\nabla}\,(\vec{H}\times\delta\vec{A})}\right]$$

$\rightarrow$ df-Int. verschw., wenn $\vec{H}\times\delta\vec{A}$ stärker als $1/r^2$ abfällt

Wenn $B\sim H$ folgt

$$\boxed{w_m = \frac{1}{2\mu_0}\int d^3r\, \vec{B}^2(\vec{r})}$$ vgl $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int d^3r\, \vec{E}(\vec{r})^2$

In diesem Falle ist auch $j\sim A$, sodass

$$w_m = \frac{1}{2}\int d^3r\, \vec{j}\vec{A}$$

---

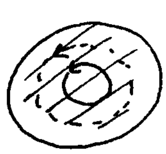
1) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\,(\vec{\nabla}\times\vec{a}) - a\,(\vec{\nabla}\times\vec{b})$

Anwendungen

(1.) Induktionskoeffizienten L

(2.) Wirbelströme

Bisher wurde $\vec{E}_{ind}$ für Drähte bzw. geschlossene Wege diskutiert. Wie ist es für einen ausgedehnten Leiter?



$\otimes \vec{B}$, $\dot{\vec{B}} \neq 0$

Man kann versch. Wege betrachten und $\oint \vec{E} d\vec{r}$

$$\oint \vec{E} d\vec{r} = -\dot{\phi} = -\pi r^2 \dot{B}$$

wenn $E = E_\varphi(r)$ radialsymmetrisch und nur in azimutaler Richtung

$$\rightarrow \quad 2\pi r\, E_\varphi(r) = -\pi r^2 \dot{B}$$

$$E_\varphi(r) \sim r$$

mit $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$; σ: Leitfähigkeit

folgt dann der Strom

Die Ströme erzeugen wiederum Magnetfelder, welche das ursprüngliche $\vec{B}$ schwächen.

Der Effekt ist im Zentrum am größten

– Gleichung:

$$\vec{\nabla} \times \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{B})} = \vec{\nabla} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{0} - \Delta \vec{B}$$

immer $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$

$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 j = \mu_0 \sigma \vec{E}$

$$\mu_0\sigma \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{E})}_{-\frac{\partial B}{\partial t}} = -\Delta\vec{B}$$

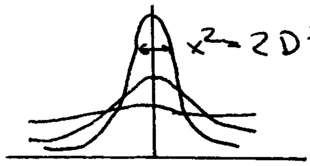
Also

$$\boxed{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0\sigma}\Delta\vec{B}}$$ im Innern des Materials

Diffusions- bzw. Wärmeleitungsgleichung!

z. B. $\frac{\partial T}{\partial t} = D\cdot\Delta T$

Bei Diffusion hängen zeitliche und räumliche Skalen zusammen



$x^2 \sim 2Dt \Rightarrow \sqrt{\overline{x^2}} = l \sim \sqrt{2Dt}$

$$l \sim \sqrt{D\cdot t}$$

Falls sich $B \sim e^{-i\omega t}$ periodisch ändert, hat man eine typ. Zeit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ und eine Länge

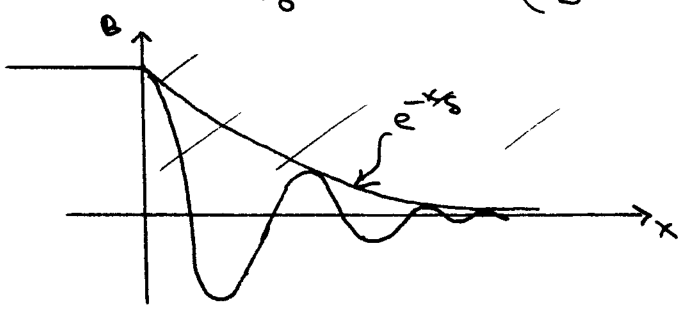
$$l \sim \sqrt{D\cdot t} \sim \sqrt{\frac{D}{\omega}} = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\sigma\omega}} \equiv \delta$$

Diese Länge legt fest, wie weit das äußere Feld in das Material eindringt

$\rightarrow$ „Eindringtiefe"

Resultat der Rechnung (Jackson):

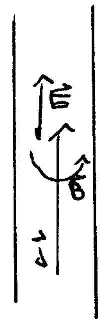
$$B = B_0 e^{-x/\delta}\cdot \underset{\cancel{\sin}}{\cos}\left(\frac{x}{\delta}-\omega t\right)$$



Das Feld dringt bis $x \sim \delta$ in das Material ein.

Vergleich: Skin-Effekt

$j \sim e^{-i\omega t}$



Wechselstrom in Drahtrichtung

$\vec B$ u. $\vec E$ sind im Vergleich zur Scheibe vertauscht

$\rightarrow$ selbe Gleichung für $\vec E$ wie oben von $\vec B$

(3.) Trägheitseffekte

Woher kommt $\vec j = \sigma \cdot \vec E$?

Bewegungsgl. eines Teilchens mit Reibung

$$m\ddot{\vec r} + m\gamma\dot{\vec r} = q\vec E$$

Für die Stromdichte $\vec j = q n \dot{\vec r}$

$$\frac{\partial \vec j}{\partial t} + \gamma \vec j = \frac{q^2 n}{m}\vec E$$

stationär: $$\vec j = \underbrace{\frac{q^2 n}{\gamma m}}_{\sigma}\vec E$$

Ohne Reibung dagegen:

$$\boxed{\frac{\partial \vec j}{\partial t} = \frac{nq^2}{m}\vec E}$$

Bilde wieder $\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec B)$

$$\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec B) = \vec\nabla\times\mu_0\vec j$$

$$\rightarrow \underbrace{\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\dot{\vec B})}_{-\Delta\dot{\vec B}} = \mu_0\,\vec\nabla\times\frac{\partial \vec j}{\partial t} = \mu_0\frac{nq^2}{m}\underbrace{\vec\nabla\times\vec E}_{=-\dot{\vec B}}$$

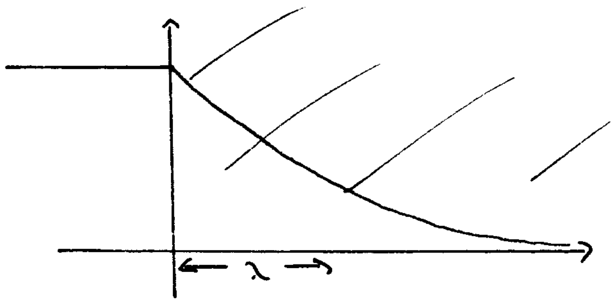
Also:

$$\boxed{\left(-\Delta + \frac{1}{\lambda^2}\right)\dot{\vec{B}} = 0} \quad ; \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\mu_0 n q^2}{m}$$

Man hat wieder eine typische Länge, nämlich

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n q^2}}$$

Für ebenen Rand



$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right)\dot{B} = 0$$

$$\rightsquigarrow \dot{B} = \dot{B}_0 \cdot e^{-x/\lambda}$$

keine örtliche Oszillation!

Durch die Trägheit gibt es immer noch einen Randbereich, wo das Feld nicht Null ist.
Tritt beim Supraleiter auf.

(4.) Flüssige Leiter

Betrachte Material mit Leitfähigkeit σ, das sich selbst bewegt, z.B. flüss. Metalle sei $u = u(\vec{r})$ die Fließgeschwindigkeit

Im mitbewegten System ist $\vec{j}' = \sigma \cdot \vec{E}$

Es gilt.

$$\vec{j} = \vec{j}' + \underbrace{\rho}_{=0 \text{ wenn Material neutral}} \vec{u}$$

und:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}$$

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

15.12.05

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}\right)$$

$$\frac{1}{\sigma}\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{j}}_{\underbrace{\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})}_{-\frac{1}{\mu_0}\Delta\vec{B}}} = \underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{E}}_{-\dot{\vec{B}}} + \vec{\nabla}\times(\vec{u}\times\vec{B})$$

Also

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\underset{\uparrow\atop\text{neu}}{(\vec{u}\times\vec{B})} + \frac{1}{\mu_0\sigma}\Delta\vec{B}$$

Angenommen, der 1. Term dominiert

$$\rightarrow \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times(\vec{u}\times\vec{B})$$

Nun gilt für den Fluss durch eine Fläche

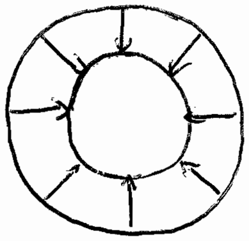
$$\frac{d}{dt}\int_{(K)}\vec{B}\cdot d\vec{f} = \int_{(K)}\Big[\underbrace{\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}_{\text{Durch Änderung von }\vec{B}} + \underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}}_{\text{Durch Änderung der Randkurve}}\Big]d\vec{f}$$

Verwende: $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} = \vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{u}) + \vec{u}\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})}_{=0}$

$$\hookrightarrow = \int_{(K)}\underbrace{\left[\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla}\times(\vec{u}\times\vec{B})\right]}_{=0}d\vec{f}$$

Also: Der Fluss durch eine Fläche, die sich mit dem Material mitbewegt, ist zeitlich konstant.

Anwendung: Spule mit Stromfluss komprimieren:



Durchflussfläche wird kleiner, aber der Fluss bleibt gleich

→ Magnetfeld wird größer

V Maxwell-Gleichungen

20. Der Verschiebungsstrom

Stationäre Ströme: $\vec{\nabla}\vec{j} = 0$

Betrachte nun $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ bzw. $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j}$

Bilde Divergenz:

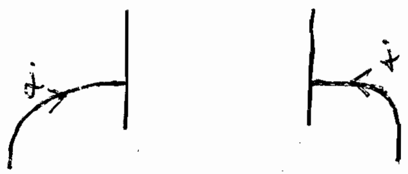
$$\to \underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})}_{\text{dies ist immer } = 0} = \mu_0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$

In der Statik ist auch die rechte Seite null, also ist die Gleichung in Ordnung

Aber: Bei zeitabh. Erscheinungen gilt nicht $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$, sondern:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\frac{\partial\varrho}{\partial t}$$

z.B. Laden eines PK:



Schreibe:

$$0 = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$
$$= \vec{\nabla}\cdot(\vec{j} + \dot{\vec{D}})$$

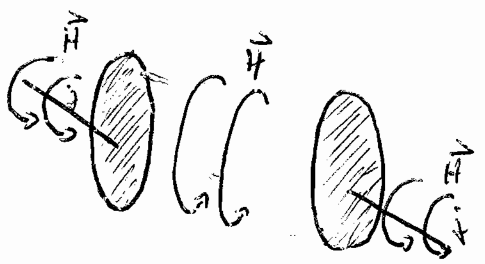
Wenn man also schreibt

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}} \qquad \text{Maxwell 1865}$$

So tritt bei der Divergenzbildung kein Problem auf.

$\dot{\vec{D}}$: Maxwellscher Verschiebungsstrom

Anschaulich: Laden eines PK



Dies hat weitreichende Konsequenzen.

21. Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \varrho$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}} \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

- Um welche Felder handelt es sich:
  (a) Im Vakuum sind es „die" Felder, wobei

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu_0\vec{H} \, ,$$

so dass man je nur eine Größe $(\vec{E}, \vec{B})$ braucht

(b) Mit Materie sind es makroskopische Größen, die über den Ort gemittelt sind

j, ρ beziehen sich auf die frei beweglichen Ladungen und sind in Materie auch gemittelte Größen.

- In Materie:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

- Die Gleichungen sind nicht ganz unabhängig

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\dot{\vec{B}}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0 = -\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{B}}$$

bzw. $\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\, \vec{B}) = 0$

Wenn also zu einem Zeitpunkt $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, dann ist dies auch zu allen anderen Zeiten der Fall.

- Welche Größen kommen vor?

Antwort:
- Skalare: ρ
- Vektoren: $\vec{E}$
- Pseudovektoren: $\vec{B}$

Erinnerung: Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$
bei $\vec{a} \rightarrow -\vec{a}$, $\vec{b} \rightarrow -\vec{b}$ ist aber $\vec{a} \times \vec{b} \rightarrow + \vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{\nabla}$ ist ein echter Vektor

$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E}$ kehrt bei Spiegelung sein Vorzeichen nicht um.

22. Erhaltungssätze

(1) Energiesatz

Ladungen, die im el. Feld bewegt werden

Zugeführte Energie pro Vol.

$$\dot{w} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Setze ein $\vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}}$

$$\dot{w} = (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \vec{E} - \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}}$$

Verwende $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H}(\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E}(\vec{\nabla} \times \vec{H})$

$$\rightarrow \dot{w} = -\vec{\nabla}(\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H}(\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}}$$

Also $\dot{w} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \underbrace{- \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} - \vec{E} \dot{\vec{D}}}_{\text{Zeitableitungen der elektr. u. magn. Energiedichten}}$

Mit $u_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu \mu_0 \vec{B}^2$

$$u_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

und $u = u_m + u_e$ folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}(w + u) + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{(\vec{E} \times \vec{H})}_{\vec{S}} = 0$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial t}(w + u) + \vec{\nabla} \vec{S} = 0$$

e-m-Energie

mech. Energie

Energiestromdichte

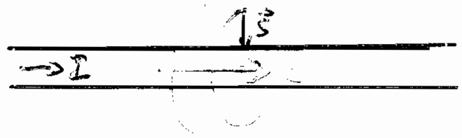
3.1.06

$$\frac{\partial}{\partial t}(\underset{\text{mech}}{w} + \underset{\text{Feld}}{u}) + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0$$

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$; Poynting-Vektor

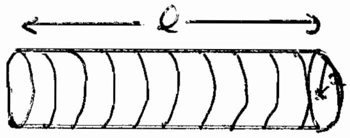
Anmerkung:
$\vec{S}$ ist nicht eindeutig, da nur die Divergenz auftritt

Beispiel: Draht mit Strom



$\vec{S}$ zeigt in den Draht hinein

Explizit:



$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$

$$H = \frac{J}{2\pi a} = \frac{j\pi a^2}{2\pi a} = \frac{1}{2} j a$$ Feld an der Oberfläche

Dies ergibt:

$$S = E \cdot H = \frac{1}{2} E \cdot j \cdot a$$

$$\rightarrow SF = S \cdot 2\pi a \cdot \ell$$

$$= \frac{1}{2} E \cdot j \cdot a \cdot 2\pi a \ell$$

$$= j E (\pi a^2 \cdot \ell)$$

$$= j \cdot E \cdot V$$

$$\rightarrow \frac{SF}{V} = j \cdot E$$ = Änderung der mech. Energie der Ladungsträger

(2) Impulssatz

Betrachte Ladungen im Vakuum

Kraft: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \dot{\vec{p}}$ (ein Teilchen)

Bei vielen Teilchen: Multipliziere mit $n(\vec{r})$

$\rightarrow \dot{\vec{g}}_{mech} = (n \cdot \dot{\vec{p}}) = \rho \cdot \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$

Impulsdichte (Impuls / Volumen) der Teilchen

Setze ein: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \rightarrow \rho = \varepsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}} \rightarrow \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}$

Es folgt

$$\dot{\vec{g}}_{mech} = \frac{1}{(\varepsilon_0)^{-1}} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \varepsilon_0 \underbrace{\dot{\vec{E}} \times \vec{B}}_{\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \times \underbrace{\dot{\vec{B}}}_{-\vec{\nabla} \times \vec{E}}}$$

$$= \varepsilon_0 \left[\vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{B} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{=0} - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right]$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B})$$

Also:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{g}_{mech} + \vec{g}_{Feld}) = \varepsilon_0 [\,..\,] + \frac{1}{\mu_0} [\,..\,]$$

mit $\underline{\vec{g}_{Feld}} = \varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 (\vec{E} \times \vec{H}) = \overbrace{\varepsilon_0 \mu_0}^{1/c^2} \vec{S}$

↳ Impulsdichte des elektromagn. Feldes

Man zeigt, dass:

$$\left[\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})\right]_\alpha = \sum_\beta \underbrace{\frac{\partial}{\partial r_\beta}\left(E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2}E^2\delta_{\alpha\beta}\right)}_{\text{hat die Form einer Divergenz}}$$

Also kann man schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{g}_{\text{mech}} + \vec{g}_{\text{Feld}}\right) - \vec{\nabla}\cdot\overline{T} = 0$$

mit $T_{\alpha\beta} = \varepsilon_0\left(E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2}E^2\delta_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}B^2\delta_{\alpha\beta}\right)$

$$(\vec{\nabla}\cdot\overline{T})_\alpha = \sum_\beta \frac{\partial}{\partial r_\beta} T_{\alpha\beta}$$

$\overline{T}$ ist der Maxwellsche Spannungstensor

$[T] = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$; $\vec{\nabla}\cdot\overline{T}$ ist eine Kraftdichte

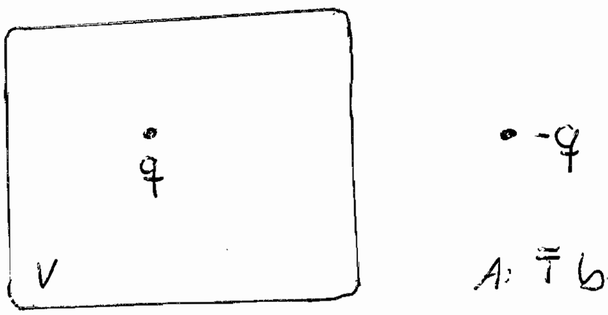
Die Gesamtkraft auf ein gewisses Volumen ist dann

$$\int_{(V)} d^3r\, \vec{\nabla}\,\overline{T} = \int_{(O)} d\vec{f}\cdot\overline{T}$$

d.h. sie kann als Integral über die Oberfläche dargestellt werden.

Man kann T auch schon für die Elektrostatik betrachten

Beispiel: 2 Ladungen



Wie groß ist die Kraft auf das Volumen V links?

A: $\overline{T}$ berechnen u. integrieren

→ Übung

(3) Drehimpulssatz

Schreibe $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ aus

→ Drehimpulsdichte:

$$\vec{l}_{Feld} = \vec{r} \times \vec{g}_{Feld}$$

(4) Zusammenfassung der Erhaltungssätze für den Fall, dass <u>nur</u> Felder vorhanden sind

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \overline{T} = 0$$

Linke Seiten sehen wie 4-dim Divergenzen aus.

Setze also:

$$x_0 = c \cdot t$$

$$x_1 = x$$

$$x_2 = y$$

$$x_3 = z$$

$$\frac{\partial (c u)}{\underbrace{\partial (ct)}_{= x_0}} + \vec{\nabla} \vec{S} = 0 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + \vec{\nabla} \underbrace{\left(\frac{1}{c} \vec{S} \right)}_{c \cdot \vec{g}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_0} + \vec{\nabla} (c \cdot \vec{g}) = 0 \qquad (1)$$

Analog

$$\frac{\partial c\vec{g}}{\partial t_0} - \vec{\nabla} \cdot \overline{T} = 0 \qquad (2)$$

Bilde aus $u, c\vec{g}, \overline{T}$ eine (4×4)-Matrix

$$\vartheta = \left(\begin{array}{c|c} u & c\cdot\vec{g} \\ \hline c\cdot\vec{g} & -\overline{T} \end{array} \right)$$

Energie-Impuls-Tensor

Die Erhaltungssätze (1), (2) lassen sich dann zusammenfassend schreiben:

$$\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \vartheta_{\alpha\beta} = 0 \; ; \qquad \beta = 0, .., 3$$

VI Wellen

23. Wellen im Vakuum

(1) Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad ; \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\vec{E}} \qquad ; \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Bilde Rotation der 1. Gleichung

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{=0} - \Delta \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \mu_0 \dot{\vec{E}}\right)$$

Also:

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\vec{E}} = 0$$

Mit $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ also

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}} = 0 \qquad \text{Wellengleichung}$$

Analog für $\vec{B}$.

(2) Eigenschaften der Wellengleichung

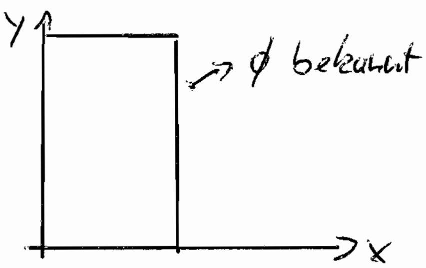
Vergleiche:

Laplace-Glg: $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ „elliptisch"

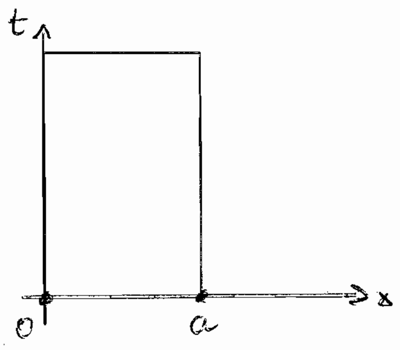
Wellengleichung: $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$ „hyperbolisch"

Randbedingungen:

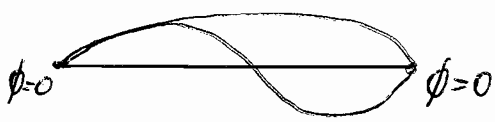
Laplace: Lösung ist eindeutig festgelegt, wenn auf einer geschlossenen Oberfläche das Potential ϕ vorgegeben ist. z.B.:



Wellengleichung:



Beispiel: Saite



Man kann fordern, dass $\phi=0$ bei $t=0$. Dann könnte man auch fordern, dass für $t=T$ auch $\phi=0$ gilt.

Dann gibt es folgende Möglichkeiten:

(a) $\phi \equiv 0$

(b) Saite könnte mit einer Eigenschwingung schwingen, die gerade Periode T hat.

$\rightarrow$ Lösung ist <u>nicht</u> eindeutig festgelegt.

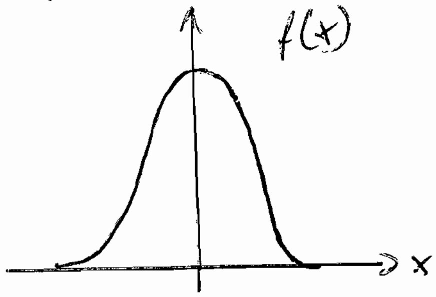
Bei der Wellengleichung stellt man <u>Anfangsbedingungen</u> (in der Zeit) und Randbedingungen (in Ort)

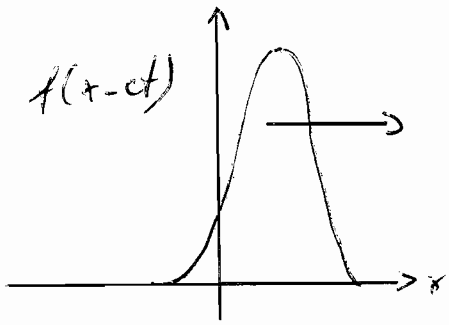
In 1D hat die Wellengleichung (ohne RB) Lösungen der Form

$$f(x-ct) \quad ; \quad g(x+ct)$$

für beliebige f, g

z.B.:

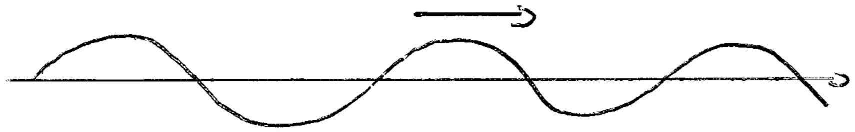




Einfachste Wellen:

$$f(r) = e^{ikr}$$

$$\to f(r-ct) = e^{ik(r-ct)} = e^{ikr-i\omega t}$$



Um Lösungen mit Randbedingungen zu finden, verwendet man wieder die Separationsmethode

$$\phi(\vec{r},t) = u(\vec{r})\cdot f(t)$$

$$\to (\Delta u)\cdot f(t) - \frac{1}{c^2}\, u\, \ddot{f} = 0$$

$$\underbrace{\frac{\Delta u}{u}}_{-k^2} = \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{f}}{f}}_{-k^2}$$

$$\to \ddot{f} = c^2 k^2 f \Leftrightarrow f(t) = e^{-ickt} = e^{-i\omega t}$$

$\to \Delta u + k^2 u = 0$ dies weiterbehandeln

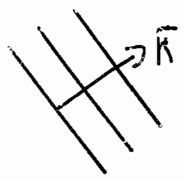
↳ „Helmholz-Gleichung"

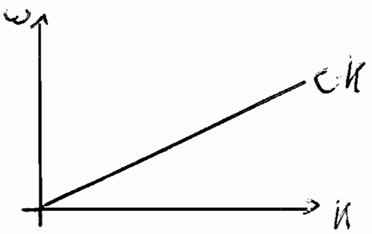
(3) Ebene Wellen

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

entspricht der Lösung $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ der Helmholz-Glg und ist also eine Lösung der Wellengleichung.

Wobei: $\omega^2 = c^2 k^2$





Richtung von $\vec{E}_0$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \left(E_{0x}\cdot ik_x + E_{0y}\cdot ik_y + E_{0z}\cdot ik_z\right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$$

$$= i\,(\vec{k}\cdot\vec{E}_0)\, e^{i(\dots)}$$

$\to \vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0 \to E_0$ senkrecht auf $\vec{k}$

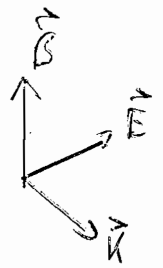
Magnetfeld:

$$\dot{\vec{B}} = -(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -i\,(\vec{k}\times\vec{E}_0)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$\to \vec{B} = \underbrace{\frac{1}{\omega}(\vec{k}\times\vec{E}_0)}_{\vec{B}_0}\, e^{(\dots)}$$

Also ist $\vec{B}$ senkrecht auf $\vec{E}$ und $\vec{k}$

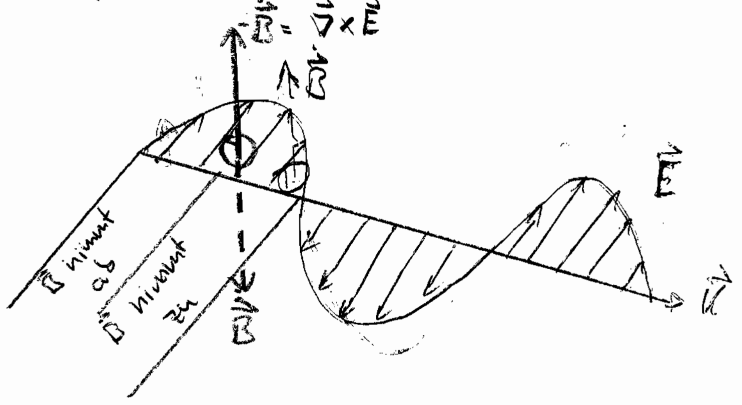
Die Vektoren $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$ bilden also ein Dreibein



Ferner gilt

$$B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{1}{c} E_0$$

Das Fortschreiten der Welle sieht man auch so



Energiedichte:

$$u(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2\mu_0}\underbrace{B_0^2}_{\frac{1}{c^2}E_0^2}\right)\cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$$

10.01.06

24. Wellen im Hohlleiter

(1) Randbedingungen

Die Ränder seien metallisch $\rightarrow$ Leitfk. σ geht ein

Tangentialkomponenten,

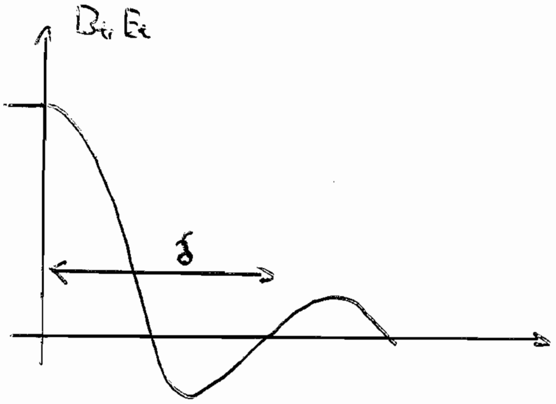
Statik: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \rightarrow E_t$ stetig

Innen $\vec{E} = 0 \rightarrow$ außen $E_t = 0$

Dynamik: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \rightarrow E_t$ stetig $\left(\int \dot{\vec{B}}\, d\vec{A} \approx 0 \right)$

Feld innen?

Erinnerung: Wirbelströme



$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}$$

Für $\sigma \rightarrow \infty$ geht $\delta \rightarrow 0$, also dringt B nur wenig ein.

$$\frac{E}{H} \sim \sqrt{\frac{\omega}{\sigma}} \rightarrow 0$$

Also ist auch hier $E_t \approx 0$ im Leiter.

Magnetfeld:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$$

Dann steht rechts bei Stokes

$$\underbrace{\int \vec{j}\, d\vec{f}}_{} + \int \dot{\vec{D}} \cdot d\vec{f}$$

hier bleibt etwas übrig, wenn $\sigma \to \infty$

Also ist für H_t, B_t der Wert innen und außen nicht gleich. Innen ist $H_t = 0$

Normalkomponenten:

$$\vec{\nabla} \vec{D} = \varrho \quad \to \quad \int \vec{\nabla} \vec{D}\, dV = \int \varrho\, dV$$

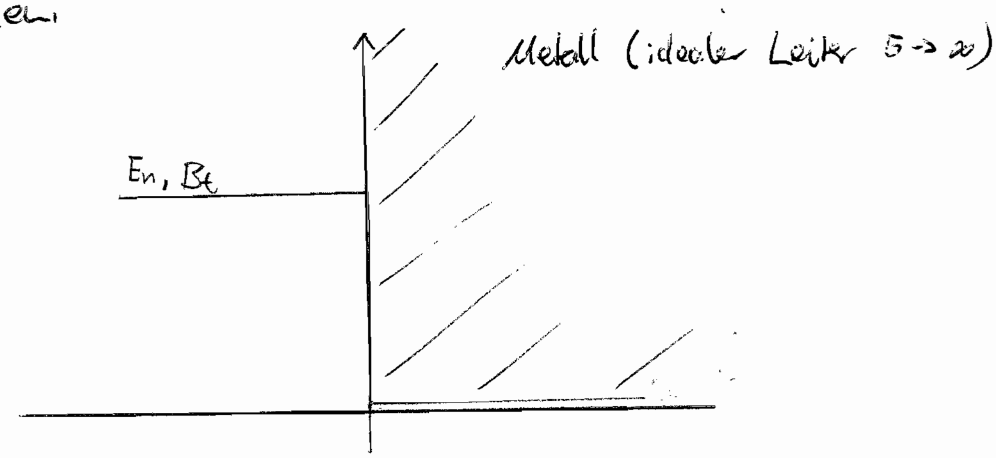
$$\int \vec{D}\, d\vec{f}$$

Wenn ϱ am Rand groß (δ förmig) ist, dann bleibt rechts etwas stehen. Dies ist für $\sigma \to \infty$ der Fall. E_n fällt auf Null wie im statischen Fall.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \to \quad B_n \text{ stetig}$$

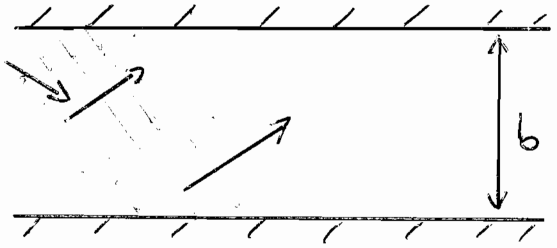
Innen ist $\vec{B}$ ebenso null wie $\vec{E}$

Zusammen:



(2) Physikalische Diskussion

Betrachte 2 metallische Platten, zwischen denen eine Welle hin- u. herläuft

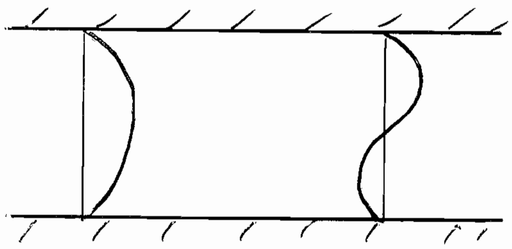


Sei $\vec{E}$ tangential zu den Platten

$\rightarrow$ $\vec{E} = 0$ auf den Platten

Die Welle wird an der Platte reflektiert und es bildet sich ein Knoten ($\vec{E}=0$). Insgesamt ergibt sich senkrecht zu den Platten eine stehende Welle.

Möglichkeiten



usw.

Zerlege das $\vec{k}$ in $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ als

$$\vec{k} = \vec{k}_{\parallel} + \vec{k}_{\perp}$$

Dann sind nur solche $\vec{k}_{\perp}$ möglich, für die

$$k_{\perp} \cdot b = n \cdot \pi \,, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

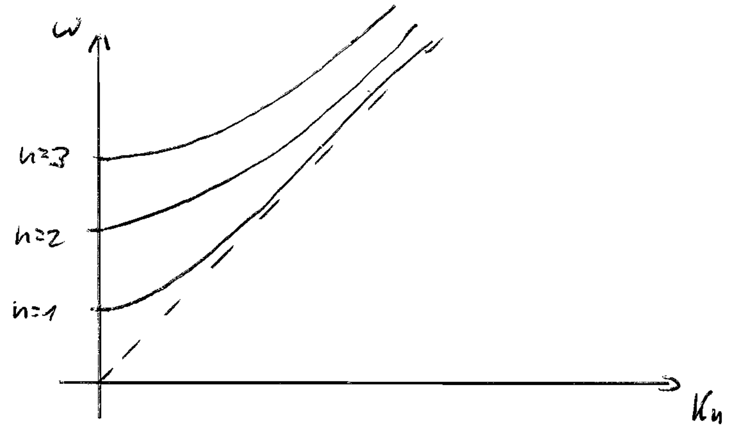
bzw. mit $k_\perp = \frac{2\pi}{\lambda_\perp}$

$$\frac{2b}{\lambda_\perp} = n \quad \rightarrow \quad \lambda_\perp = \frac{2b}{n}$$

Die Frequenzen sind

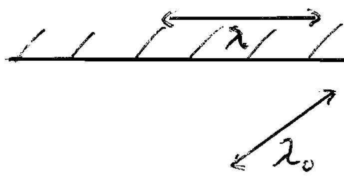
$$\omega^2 = c^2 \vec{k}^2 = c^2 \left(k_\perp^2 + k_\parallel^2 \right)$$
$$= c^2 \left(\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + k_\parallel^2 \right)$$

$$\rightarrow \omega = c \sqrt{\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 + k_\parallel^2}$$



Phasengeschwindigkeit

$$u = \frac{\omega}{k_\parallel} = c \, \frac{\sqrt{}}{k_\parallel} > c$$



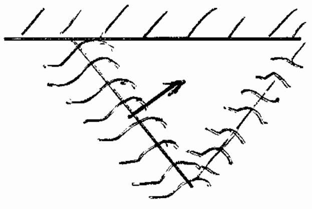
Abstand zweier Berge für die Welle zwischen den Platten

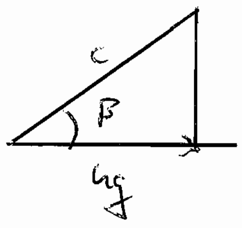
Die Distanzen λ u. λ_0 werden in der selben Zeit durchlaufen $\rightarrow$ $u > c$

Gruppengeschwindigkeit

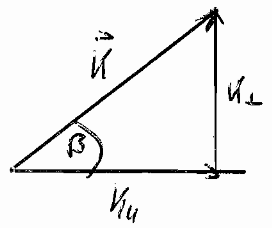
$$\underline{u_g} = \frac{d\omega}{dk_\parallel} = c\,\frac{k_\parallel}{\sqrt{\cdots}} \;\underline{< c}$$

Komponente parallel zu den Platten





$$u_g = c \cdot \underbrace{\cos\beta}_{\frac{k_\parallel}{\sqrt{\cdots}}}$$



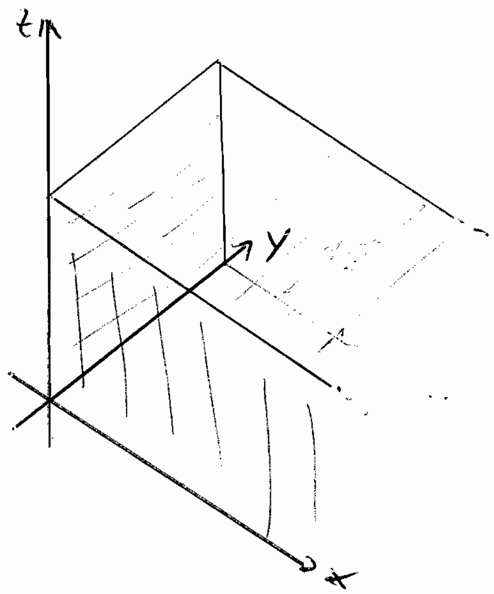
Kleinste mögliche Frequenz:

$$\omega_{min} = c \cdot \frac{\pi}{b}$$

$b = 10\text{ cm} \rightarrow \omega_{min} = 10^{10}\text{ Hz} = 10\text{ GHz}$

(3) Genaue Behandlung

Betrachte rechteckigen Hohlleiter



Alle Komponenten von $\vec{E}$ u. $\vec{B}$ erfüllen

$\Delta\phi + k^2\phi = 0$, $\omega = c\,k$

Helmholtz-Gleichung

Suche eine Lösung in Form eines Produktes

$$\phi(x,y,z) = f(x)\,g(y)\,h(z)$$

Für Welle in x-Richtung setze

$$f(x) = e^{ik_n x}$$

Dann bleibt

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) g \cdot h - \underbrace{(k^2 - k_n^2)}_{k_\perp^2} g \cdot h = 0$$

Helmholtz-Glg., wo nur noch y, z vorkommt.

Komponenten von $\vec{E}, \vec{B}$

Wir betrachten den Fall

$\vec{E} = (0, E_y, 0)$ Transversal-elektrische (TE) Welle

Für $\vec{B}$ setze $\vec{B} = (B_x, 0, B_y)$ <u>nicht</u> transversal

Betrachte nämlich

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \rightarrow (\vec{\nabla} \times \vec{E})_x = -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\dot{B}_x$$

Es muss also B_x auftreten, wenn $\frac{\partial E}{\partial z} \neq 0$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_y = 0 = -\dot{B}_y \Rightarrow B_y = 0 \text{ möglich}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} = ik_n E_y = i\omega \vec{B}_z$$

12.01.06

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}} \rightarrow (\vec{\nabla}\times\vec{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{1}{c^2}\dot{E}_x = 0$$

$\rightarrow B_z$ unabhängig von y

$$(\vec{\nabla}\times\vec{B})_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial z} - ik_\parallel B_z = -\frac{i\omega}{c^2}E_y$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{B})_z = -\frac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \rightarrow B_x \text{ unabhängig von } y$$

RB für B_x

unten/oben: $\left.\begin{array}{l} E_y \equiv E_t \equiv 0 \\ B_z \equiv B_n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0$

Ferner: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 = \frac{\partial E_y}{\partial y} \rightarrow E_y$ unabhängig von y

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{\partial B_x}{\partial x}}_{ik_\parallel B_x} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Das ergibt für B_x:

$$B_x(z) = B_x^0 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}z\right) \quad \left(= B_x^0 \cdot \cos(k_\perp z)\right)$$

und für B_z

$$B_z(z) = B_z^0 \sin\left(\frac{n\pi}{b}z\right) = B_z^0 \sin(k_\perp z)$$

mit

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial B_z}{\partial z} = k_\perp B_z^0 \cos(k_\perp z) \\ \quad = -ik_\parallel B_x^0 \cos(k_\perp z) \end{array}\right\} B_z^0 = -i\frac{k_\parallel}{k_\perp}B_x^0$$

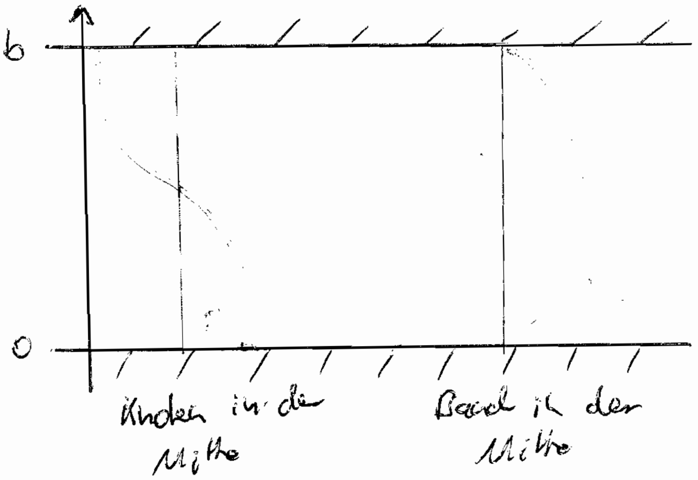
und für E_y:

$$E_y(z) = E_y^0 \sin\left(\frac{\pi n}{b} z\right)$$

mit $\quad E_y = \frac{\omega}{k_n} B_z \quad \to \quad E_y^0 = \frac{\omega}{k_n} B_z^0$

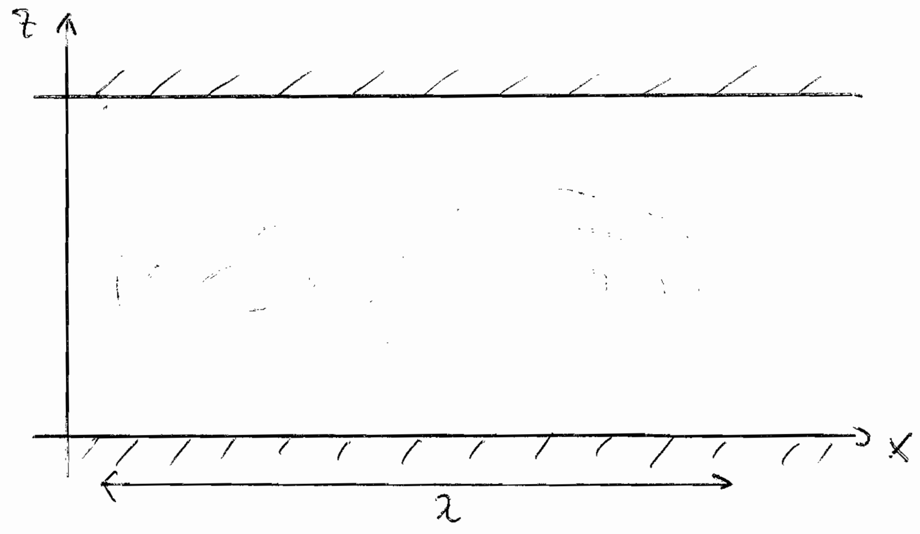
Eine Amplitude, z.B. B_x^0 kann man frei wählen

Beispiel $n=1$:



Wegen des Faktors i zwischen B_x^0 u B_z^0 hat man eine Phasenverschiebung in Bezug auf die x-Abhängigkeit. B_x maximal $\Leftrightarrow$ $B_z = 0$

Das Ergibt:



Dies entsteht aus einer transversalen Welle

Entstehung durch „Zusammenbiegen" der B-Linien wegen der RB

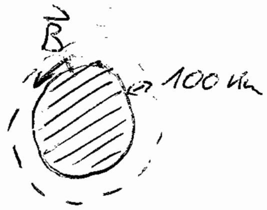
Übung → TM-Welle

(4) Beispiele

(a) Übliche Hohlleiter (z. B. für Radar)
Resonatoren (stehende Wellen)
Koaxialkabel → TEM-Wellen

(b) Lichtwellenleiter
Hier Materialien mit zwei ε

(c) Erde + Atmosphäre
Erdboden u. Ionosphäre haben Leitfähigkeit



Einfachster Fall: $\lambda = 2\pi R$

$$\omega = c \cdot k = c \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{c}{R}$$

$$\to \omega \approx 50\, s^{-1} \to \nu \approx 10\, Hz$$

Die Schwingungen heißen Schumann-Resonanzen

25. Wellen in homogenen Medien

Volle Maxwell-Glg. mit ε, μ, σ. Beachte: Diese hängen i. A. von der Frequenz ω ab!

(1) Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\mu_0 (\vec{j} + \dot{\vec{D}})$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{=0} - \Delta \vec{B} = \vec{\nabla} \times \left[\mu\mu_0 (\vec{j} + \dot{\vec{D}})\right]$$

$$= \mu\mu_0 \underbrace{(\vec{\nabla} \times \sigma \vec{E})}_{-\sigma \dot{\vec{B}}} + \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{-\dot{\vec{B}}}$$

Also:

$$\underbrace{\Delta \vec{B} - \mu\mu_0 \sigma \dot{\vec{B}}}_{\substack{\text{wie früher} \\ \text{(s. Wirbelströme)}}} \underbrace{- \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \ddot{\vec{B}}}_{\text{von } \dot{\vec{D}}} = 0$$

Analog:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \rho} - \Delta \vec{E}$$

$$\rightarrow \Delta \vec{E} - \mu\mu_0 \sigma \dot{\vec{E}} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \ddot{\vec{E}} = \vec{\nabla} \left(\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \right)$$

(2) Diele~~ktr~~ktrika

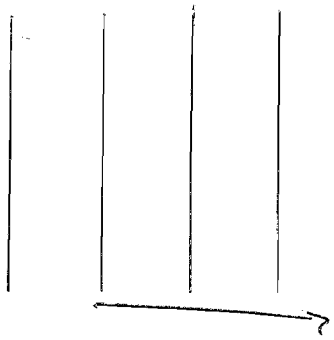
Hier ist $\rho = 0$, $\sigma = 0$ $\rightarrow$ Wellengleichung für $\vec{E}, \vec{B}$ mit

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$\rightarrow$ Analoge Eigenschaften der Wellen wie im Vakuum. Abe Dämpfung wenn ε, μ komplex

(3) Metalle

Longitudinalwellen:



$$\vec{E} = (E_x^0, 0, 0)\, e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = E_x^0\, ik\, e^{\cdots} = ik\, E_x = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$\to \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}\right)$$

Ergibt in der Wellengleichung:

$$\cancel{\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}} - \mu\mu_0\sigma \underbrace{\dot{E}_x}_{-i\omega E_x} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\underbrace{\ddot{E}_x}_{-\omega^2 E_x} = \cancel{\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}}$$

$$\left(i\omega\sigma + \varepsilon\varepsilon_0\omega^2\right) E_x = 0$$

$$\to \omega = -i\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\right)$$ ω ist unabh. von k

Ist σ reell, so ist ω ~~reell~~ imaginär. Damit klingt E zeitlich ab und oszilliert nicht. Wenn aber σ komplex, z.B.:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}$$ $\to$ quadrat. Gl. für ω (kann oszillieren)

$\to$ Schwingungen (Plasmaschwingungen) in Aufgabe 34

17.1.06

(4) Transversalwellen

Hier fällt der δ-Term aus der Gleichung heraus und mit $\vec{E} \sim e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$ folgt aus

$$\Delta \vec{E} - \mu\mu_0\sigma\dot{\vec{E}} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\ddot{\vec{E}} = 0$$

$$\left(-k^2 + i\omega\mu\mu_0\sigma + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\omega^2\right)\vec{E} = 0$$

Aufgelöst nach k:

$$k^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\left(\underbrace{\omega^2}_{\text{von } \dot{\vec{D}}} + \underbrace{\frac{i\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\omega}_{\text{von } \vec{j}}\right)$$

→ i.A. ist k komplex, d.h. man hat ein Abklingen der Welle im Ort (Verluste durch Ströme).
Dies ist dominierend bei kleinen ω

↳ Übung

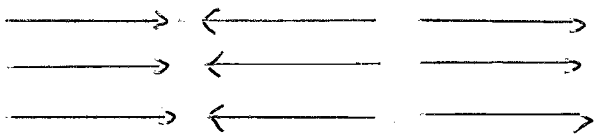
Bei großen ω. Verwende

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau} \cong \frac{\sigma_0}{-i\omega\tau}$$

$$\rightarrow \frac{i\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\omega \cong -\frac{\sigma_0}{\varepsilon\varepsilon_0\tau} \quad \text{reell}$$

→ k reell „UV-Durchsichtigkeit von Metallen"

Unterschied Longitudinal - transversal



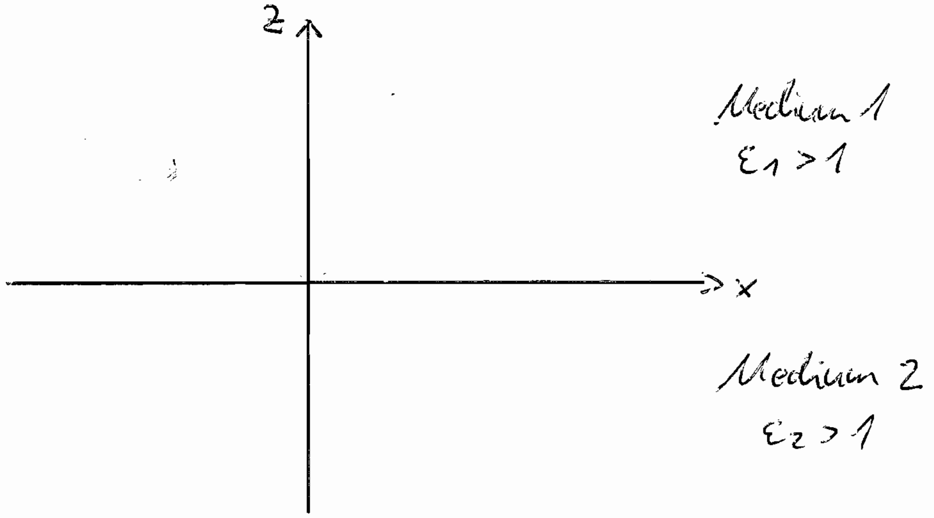
Ladungen werden angehäuft

Transversal: $\uparrow\uparrow\uparrow \quad \downarrow\downarrow\downarrow \quad \uparrow\uparrow\uparrow$ Keine Ladungsanhäufungen

26. Reflexion an Grenzflächen

(1) Situation: 2 Dielektrika mit ebener Grenzfläche

Ebene Welle fällt auf die Grenzfläche



2 Möglichkeiten:

- E parallel zur Einfallsebene („p")
- E senkrecht " " („s")

Wir betrachten den p-Fall.
Wir wissen schon, dass es eine reflektierte und eine durchgelassene Welle gibt.
Dies ist mathematisch auch nötig, um die zwei RB zu erfüllen.

E_t stetig, D_n stetig

Setze also

Einf.: $\vec{E}_e \cdot e^{i(\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega t)}$

Refl.: $\vec{E}_r \cdot e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}$

Durch.: $\vec{E}_d \cdot e^{i(\vec{k}_d \cdot \vec{r} - \omega t)}$

mit $\omega^2 = c_1^2 k_e^2 = c_1^2 k_r^2 = c_2^2 k_d^2$; $c_i^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_i}$

(2) Richtungen der Wellen

Auf der Grenzfläche $z=0$ hat man die e-Faktoren

$$e^{i k_{ex} \cdot x}, \quad e^{i k_{rx} \cdot x}, \quad e^{i k_{dx} \cdot x}$$

An <u>jedem Ort x</u> müssen die <u>RB</u> gelten

→ die e-Faktoren müssen alle gleich sein

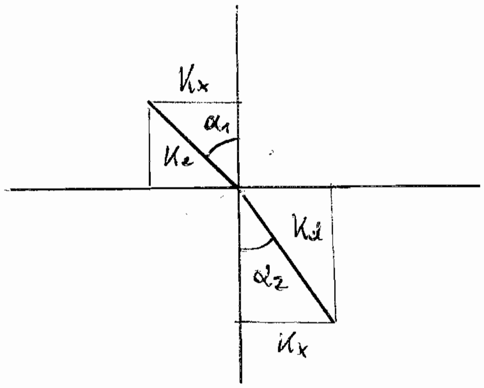
→ $k_{ex} = k_{rx} = k_{dx} \equiv k_x$

Es folgt mit

$$+k_r^2 = k_e^2 \rightarrow k_{rz}^2 = k_{ez}^2$$

Reflexion: $k_{rz} = -k_{ez}$

$$\frac{k_e^2}{n_1^2} = \frac{k_d^2}{n_2^2} \quad ; \quad n_i = \sqrt{\varepsilon_i}$$

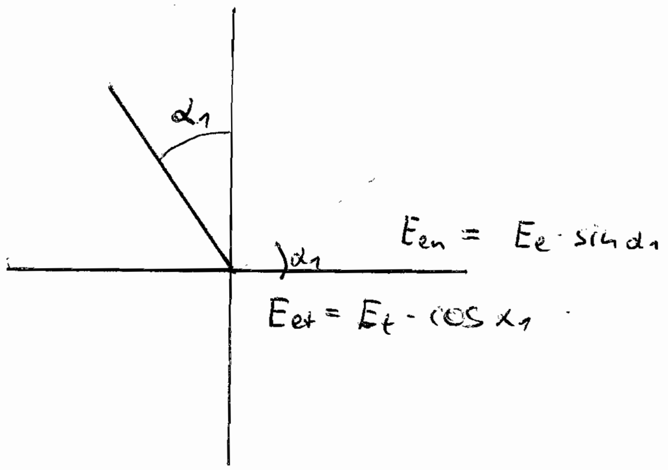


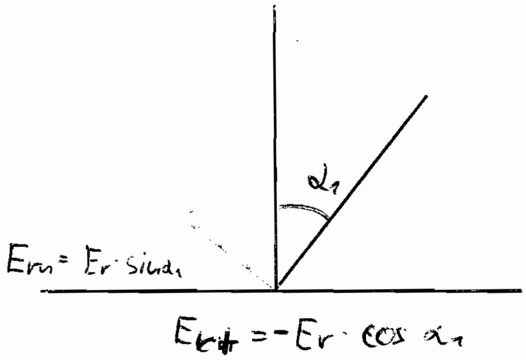
$\sin \alpha_1 = \frac{k_x}{k_e}$

$\sin \alpha_2 = \frac{k_x}{k_d}$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{k_d}{k_e} = \frac{n_2}{n_1}$$

(3) Amplituden der Felder





Analog für E_d

E_t stetig: $E_{et} + E_{rt} = E_{dt}$

$$E_e \cdot \cos \alpha_1 - E_r \cos \alpha_1 = E_d \cos \alpha_2$$

$$(E_e + E_r) \cdot \cos \alpha_1 = E_d \cdot \cos \alpha_2 \quad (1)$$

εE_n stetig: $\varepsilon_1 (E_{en} + E_{rn}) = \varepsilon_2 E_{dn}$

$$\varepsilon_1 (E_e + E_r) \cdot \sin \alpha_1 = \varepsilon_2 E_d \cdot \sin \alpha_2 \quad (2)$$

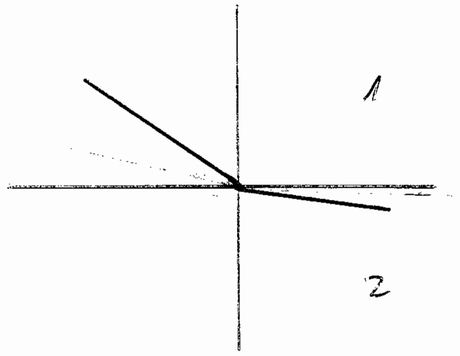
→ 2 Gleichungen für E_r, E_d, wenn E_e gegeben.

→ Berechne $\frac{E_r}{E_d}$, bzw. $R = \left(\frac{E_r}{E_d}\right)^2$ Reflexionskoeff.

→ Übung

(4) Totalreflexion

Wenn $n_2 < n_1$ hat man Brechung vom Lot weg



Was passiert in diesem Fall ?

$$k_d^2 = k_x^2 + k_{dz}^2 = \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 k_e^2 = \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \left(k_x^2 + k_{ez}^2\right)$$

$$\rightarrow k_{dz}^2 = k_x^2 \underbrace{\left[\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - 1\right]}_{<0 \text{ n. Vor.}} + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 k_{ez}^2$$

$$= k_e^2 \left\{ \sin^2\alpha_1 \left[\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - 1\right] + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos^2\alpha_1 \right\}$$

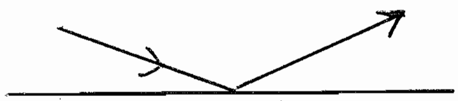
$$= k_e^2 \underbrace{\left\{ \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2\alpha_1 \right\}}$$

wird negativ, wenn $\sin^2\alpha_1 > \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$

Dann ist $k_{dz}^2 < 0 \rightarrow k_{dz} = \pm i\, |k_{dz}|$

$$\rightarrow e^{i\vec{k}_d \cdot \vec{r}} = e^{\pm |k_{dz}| \cdot z} \cdot e^{i k_x \cdot x}$$

→ Man erhält eine Welle in x-Richtung, deren Amplitude ins Medium 2 hinein immer kleiner wird



12.1.06

VII Strahlung

27. Retardierte Potentiale

Wir betrachten zeitabh. Probleme im Vakuum.

(1) Eichung der Potentiale

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}$$

Dieselben Felder folgen aus

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$$
$$\phi' = \phi - \dot{\chi}$$

Daher kann man an $\vec{A}, \phi$ eine zusätzliche Bedingung stellen, z. B.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\phi} = 0 \quad , \quad \text{Lorentz-Bedingung}$$

Trotzdem sind auch dann $\vec{A}, \phi$ nicht völlig eindeutig. Auch A' und ϕ' erfüllen die Bed., wenn gilt

$$\Delta\chi - \frac{1}{c^2}\ddot{\chi} = 0$$

Wenn $\vec{A}, \phi$ die Lorentzbed. erfüllen, spricht man von Lorentz-Eichung

(2) Gleichungen für die Potentiale

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\to \vec{\nabla} \cdot \left(-\nabla\phi - \dot{\vec{A}}\right) = -\Delta\phi - \vec{\nabla}\dot{\vec{A}}$$

$$= -\Delta\phi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)$$

$$= -\Delta\phi + \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} = \rho/\varepsilon_0$$

d.h. $\Box\phi \equiv \Delta\phi - \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Inhomogene Wellengleichung $\hat{=}$ Poisson-Glg.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}\right)$$

$$\to \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \cancel{\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right)} - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\left(\cancel{-\vec{\nabla}\dot{\phi}} - \ddot{\vec{A}}\right)$$

d.h. $\Box\vec{A} \equiv \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} = -\mu_0\vec{j}$

Analoge Gleichung wie für ϕ

Man hat also die Glg. für $\vec{A}$ u. ϕ entkoppelt.

(3) Lösung der Gleichungen

Betrachte ϕ

Ohne Zeitabhängigkeit hat man die Poisson-Glg. mit Lösung

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, d^3r'$$

Wir lösen die zeitabh. Gleichung mit Fouriertransf.

$$\rho(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \rho(\vec{r},\omega)\, e^{-i\omega t}$$

$$\phi(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \phi(\vec{r},\omega)\, e^{-i\omega t}$$

Einschub: Fourieranalyse

Betrachte eine periodische Funktion $f(t)$

$$f(t+T) = f(t)$$

Idee: Schreibe $f(t)$ in der Form

$$f(t) = \sum_n f_n \, e^{-i\omega_n t} \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Jede einzelne e-Funktion muss auch die Periodizität in T haben.

$$e^{-i\omega_n (t+T)} = e^{-i\omega_n t}$$

$$\rightarrow e^{-i\omega_n T} = 1$$

$$\rightarrow \omega_n T = 2\pi n \quad \rightarrow \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

Man kann $e_n = e^{-i\omega_n t}$ als „Basisvektoren" im Funktionenraum ansehen.

$$\rightarrow f = \sum_n f_n e_n$$

Die e_n bilden ein Orthogonalsystem

$$\text{Sei } \langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \, e_n^* e_m$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T dt \, e^{i(\omega_n - \omega_m)t}$$

$$= \frac{1}{T} \frac{1}{i(\omega_n - \omega_m)} \underbrace{e^{i(\omega_n - \omega_m)t} \Big|_0^T}_{(e^{i(\omega_n - \omega_m)T} - 1) = 0}$$

Also: $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$

Daher

$$\langle f, e_m \rangle = \sum_n f_n \underbrace{\langle e_n, e_m \rangle}_{\delta_{nm}}$$

Also ist

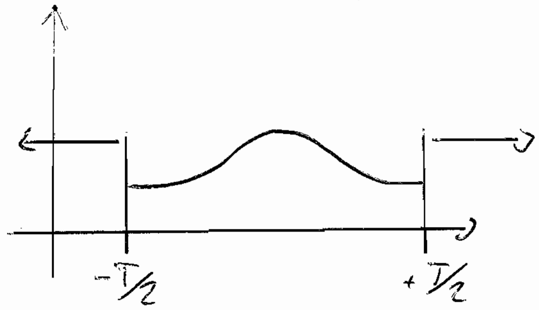
$$f_m = \langle f, e_m \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \; \overset{\text{ungünstig}}{f^*(t)} \, e^{-i\omega_m t}$$

Formel für die Koeffizienten, bzw.:

$$\langle e_m, f \rangle = \frac{1}{T} \int dt \; e^{i\omega_m t} f(t) = \sum_n f_n \langle e_m, e_n \rangle = f_m$$

$$\rightarrow f_m = \frac{1}{T} \int_0^T dt \; f(t) \, e^{i\omega_m t}$$

Aperiodische Funktionen:
Periode T immer größer machen: $T \to \infty$



Dann werden die $\omega_n = \frac{2\pi}{T} n$ immer dichter
Schreibe:

$$f(t) = \sum_{\omega_n} f_n \, e^{-i\omega_n t}$$

$$= \frac{1}{\Delta\omega} \sum_{\omega_n} \Delta\omega \cdot f_n \, e^{-i\omega_n t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\sum_{\omega_n} \Delta\omega}_{\to \int d\omega} \underbrace{(T \cdot f_n)}_{f(\omega)} \underbrace{e^{-i\omega_n t}}_{e^{-i\omega t}}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, f(\omega)\, e^{-i\omega t}$$ Fourier-Integral

Für $f(\omega)$ folgt aus der Formel für die Koeffizienten:

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t)\, e^{i\omega t}$$

Einsetzen in

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

$$\int \frac{d\omega}{2\pi}\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right]\phi(\vec{r},\omega)\, e^{-i\omega t} = -\int \frac{d\omega}{2\pi}\, \frac{1}{\varepsilon_0}\, \varrho(\vec{r},\omega)\, e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow \quad (\Delta + k^2)\,\phi(\vec{r},\omega) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\varrho(\vec{r},\omega) \quad ; \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Inhomogene Helmholtzgleichung

Betrachte den Fall, dass rechts $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ steht. Für $k=0$ hätte man:

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Für $k \neq 0$ ist die Lösung:

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Wenn rechts ein beliebiges $\varrho(\vec{r}\,',\omega)$ steht, muss man über r' integrieren. Das ergibt:

$$\phi(\vec{r},\omega) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\, \frac{\varrho(\vec{r}\,',\omega)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Einsetzen gibt:

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{\pm i\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'| - i\omega t}\, \frac{\rho(\vec{r}',\omega)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\to \quad e^{-i\omega\left(\underbrace{t \mp \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|}_{t'}\right)}$$

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \; ; \quad t' = t - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|$$