(P)

Kapitel 2

27.4.07

Satzbuchstaben : p, q, r, s, t

Junktoren : ¬ , ⊃ , ∧ , ∨ , ≡ (genau dann, wenn)

Prädikatbuchstaben : F^n, G^n, H^n

Funktoren[1] : f^n, g^n, h^n

Individuenvariable : x, y, z } Individuenzeichen

Individuenkonstanten : a, b, c }

Quantoren : ∀, ∃

Term: rekursive Definition :

$t = \alpha$ Individuenzeichen, oder

$t = \varphi(\tau_1 .. \tau_n)$, Funktor φ , Terme τ_i

Formel

1. (α) Satzbuchstabe α } atomare Formel
2. $(\tau = \tau')$
3. $(\pi\tau_1 .. \tau_n)$ Prädikatbuchstabe π
4. $(\neg\beta)$ Formel β
5. $(\beta \supset \gamma)$
6. $(\forall_\varrho \beta)$ Individuenvariable ϱ, Formel β

Objektsprache ↔ Metasprache

griechische Buchstaben sind Metavariablen

[1] $a = f(b)$: Paris ist die Hauptstadt von Frankreich

materiale Konditionale

$\gamma \supset \delta$ ist nur dann falsch, wenn γ wahr und δ falsch ist

Erweiterte Junktoren:

$\vee \quad := \quad \neg\alpha \supset \beta$ (Disjunktion)

$\wedge \quad := \quad \neg(\alpha \supset \neg\beta)$ (Konjunktion)

$\equiv \quad := \quad (\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha) \quad = \neg((\alpha \supset \beta) \supset (\beta \supset \alpha))$

(Bisubjunktion) ; $\supset$ Subjunktion

$=$ drückt Identität aus

23.4.07

"Logik ist die Theorie der gültigen Schlüsse"

oder:

Logik ist die Theorie der systematischen Formalisierung von Sätzen und der deduktiven Folgerungen aus diesen Sätzen

Für die Gültigkeit kommt es nur auf die Form an -> daher Formalisierung

Todo:

Semantisch vs syntaktisch

3-4 umgangssprachliche Sätze und ihre Formalisierung

Kapitel 3 lesen

Ⓟ

Kapitel 3

Logik:

a) Argumentationen

b) Aussagen, die mit logischer Notwendigkeit wahr sind

Allgemeingültig: Formel α ist prädikatenlogisch gültig (allgemeingültig), wenn sie in jeder Interpretation wahr ist

Prädikatenlogische Interpretation:

$\mathfrak{I} = \langle D, V \rangle$

D: "Individuenbereich", Domain; Menge aller als existent angenommenen Individuen

V: "valuation", Bewertungsfunktion über D

Bedingungen:

a) $D \neq \emptyset$

b) $V = f(\text{Def. Ber.})$

Def. Ber.:

- Formeln
- Terme
- Funktoren
- Prädikatsbuchstabe
- Gleichheitszeichen

Weitere Eigenschaften der Bewertungsfunktion (Zuordnungen)

a) $P^n \rightarrow$ Teilmenge von D^n (Menge aller geord. Typel)

b) " = " $\rightarrow \{\langle a,a\rangle \mid a \in D\}$

c) $\phi^n \rightarrow f(D^n \rightarrow D)$

d) $\tau \rightarrow a \in D$, jeden Term genau ein Element aus D

$\tau = \phi(\tau_1 .. \tau_n)$

$\rightarrow V(\tau) = V(\phi)(V(\tau_1) .. V(\tau_n))$

e) $\beta \rightarrow \{w, f\}$ Formel wird Wahrheitswert zugeordnet

- Satzbuchstaben unbeschränkt
- Sonst:

i) $\alpha = (\tau_1 = \tau_2) \rightarrow w$ wenn $V(\tau_1) = V(\tau_2)$

ii) $\alpha = (\pi \tau_1 .. \tau_n)$, $V(\alpha) = w$ wenn $\langle V(\tau_1) .. V(\tau_2)\rangle \in V(\pi)$

$\uparrow$
Präd.

iii) $V(\alpha) = w$, $\alpha = \neg\beta$

$\Rightarrow V(\beta) = f$

iv) $\alpha = (\beta \rightarrow \gamma)$

$V(\alpha) = f$ wenn $V(\beta) = w$ und $V(\gamma) = f$

v) $\alpha = (\forall e \beta)$

$V(\alpha) = w$ wenn $V'(\beta) = w$ für alle V' über D

V' ist e-Variante von V über D:
unterscheidet sich von V nur durch den Wert, den sie e zuordnet

Formalisierung eines Satzes

29.4.07

Wenn X eine endliche Menge ist und $f: X \to X$ eine Abbildung, dann sind äquivalent:

(i) f ist injektiv $(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

(ii) f ist surjektiv

$$\forall x \forall y \left(F^1x \wedge F^2yx \right) \supset \left(\forall x_1 \forall x_2 \left(g^2 x_1 x \wedge g^2 x_2 x \supset \left(f^2(x_1 y) = f^2(x_2 y) \supset (x_1 = x_2) \right) \right) \right)$$

$$\equiv \left(\forall x_1 \exists x_2 \left(g^2 x_1 x \wedge g^2 x_2 x \Leftrightarrow (x_1 = f^2(x_2 y) \right) \right) \right)$$

Andere, kurze Möglichkeiten

$$\forall x \forall y \left((F^1x \wedge F^2yx) \supset g^1 y \equiv g_2^1 y \right)$$

Syntax und Semantik

Semiotik (Theorie des Zeichens)

- Syntax (Syntaktik)
- Semantik: Interpretation der Zeichen
- Pragmatik

Interpretation:

Terme $\to$ Objekt

Formeln $\to$ Wahrheitswerte

Prädikate $\to$ Menge aller Objekte, auf die dieses Prädikat zutrifft

z.B.:

$Pa \to$ wahr, wenn a in der Menge ist, die P zugeordnet wurde

Bivalenzprinzip: Es gibt nur die Wahrheitswerte wahr oder falsch, und jedem Ausdruck kann einer der beiden Wahrheitswerte zugeordnet werden

Dies ist eins der beiden Bedingungen, die "klassische" Logik ausmachen

HA: Prädikatenlog. Formel aufschreiben (mit Quantor) zeigen: entweder ist allgemeingültig, nie wahr, manchmal wahr (für die konkrete Formel)

<u>Beweis einer prädikatenlogischen Formel</u>

<u>Beh.:</u> $\forall x\, (F^1 x \wedge G^1 x) \equiv \forall x\, F^1 x \wedge \forall x\, G^1 x$

<u>Bew.:</u>

1) zz: $\underbrace{\forall x\, (F^1 x \wedge G^1 x)}_{\beta} \supset \underbrace{(\forall x\, F^1 x \wedge \forall x\, G^1 x)}_{\chi}$ $(-\alpha)$, $V(\alpha) = w$

angenommen $V(\beta) = w$, da ansonsten $V(\alpha) = w$ schon gewährleistet ist. (2.5.4)

$V(\beta) = w$ heißt:

Für jede x-Variante V' über V gilt:

$V'(F^1 x \wedge G^1 x) = w$ (2.5.5)

Weiterhin gilt allgemein $(\alpha \wedge \beta) := \neg(\alpha \supset \neg\beta)$, also:

$V'(F^1 x \supset \neg G^1 x) = f$

Nach 2.5.4 ist dies äquivalent zu

$V'(F^1 x) = w$ und $V'(\neg G^1 x) = f$

$= V'(G^1 x) = w$ (2.5.3)

Ⓟ

In Umkehrung von 2.5.5 ergibt sich damit, da V' nach wie vor eine beliebige x-Variante ist:

$V(\forall x F^1 x) = w$ und

$V(\forall x G^1 x) = w$

bzw.

$V(\forall x F^1 x) = w$, $V(\neg\forall x G^1 x) = f$

In der Umkehrung von 2.5.4. gilt also

$V(\forall x F^1 x \supset \neg \forall x G^1 x) = f$

$\overset{2.5.3}{\Rightarrow} V(\neg(\forall x F^1 x \supset \neg \forall x G^1 x)) = w$

$\Rightarrow V(\forall x F^1 x \wedge \forall x G^1 x) = w$

Damit gilt dann schließlich (2.5.4)

$V(\forall x (F^1 x \wedge G^1 x) \supset (\forall x F^1 x \wedge \forall x G^1 x)) = w$

2) Weiterhin muss die Umgekehrte Richtung gezeigt werden:

z.z. $(\forall x F^1 x \wedge \forall x G^1 x) \supset \forall x (F^1 x \wedge G^1 x)$ $(= \alpha)$

$V(\alpha) = w$

Wieder wird vorausgesetzt, dass

$V(\forall x F^1 x \wedge \forall x G^1 x) = w$ ist.

In Analogie zum obigen Fall gilt dann

$V(\forall x F^1 x) = w$ und $V(\forall x G^1 x) = w$

Wiederum gilt also für ~~eine~~ jede bel. x-Variante V'

$V'(F^1 x) = w$, $V'(G^1 x) = w$

$\Rightarrow V'(F^1 x \supset \neg G^1 x) = f$

$\Rightarrow V(\forall x (F^1 x \wedge G^1 x)) = w$

q.e.d.

7.5.07

logisch gültig — kontingent — logisch falsch
allgemeingültig kontradiktorisch
logisch ungültig

semantisch abgeschlossen := Sprache ist ihre eigene Metasprache

Jede natürliche Sprache ist semantisch abgeschlossen

Tarski zeigt, dass aus dieser Eigenschaft Paradoxien (Lügner - Paradoxien) folgen → Lösung: künstliche Trennung

Prädikatenlogik mit einstelligen Prädikaten sind noch (algorithmisch) entscheidbar (so wie Aussagenlogik)

Zu betrachten:

$\alpha = (\forall x \exists y ((G^1 x \supset F^2 yx) \wedge \neg F^2 ya)) \supset G^1 a$

äquivalent:

$\neg((\forall x \exists y (--) \wedge G a) = \alpha$

HA: obige Aufgabe, Kapitel 4 lesen

Ⓟ

20.5.07

Freie / gebundene Variablen:

ϱ ist frei, wenn es nicht bei einem Quantor steht

σ ist frei für ϱ, wenn ϱ nicht bei einem Quantor steht, zu dessen Einzugsbereich auch σ gehört.

Mit anderen Worten:

σ ist frei für ϱ, wenn die Stelle, an der σ steht, immer noch frei ist, wenn man σ durch ϱ ersetzt

z.B.: $\forall x \; R^3xyz$

- x ist gebunden, y und z frei
- y und z sind nicht frei für x
- y ist frei für z und z ist frei für y

KPL

A1: Reflexivität der Identität: $\tau = \tau$ ist Axiom

A2: Extensionalitätsaxiome: $(\varrho = \tau) \supset (\alpha[\varrho] \supset \alpha[\tau])$

in $\alpha[\tau]$ sind einfach einige freie ϱ's durch τ ersetzt worden

A3: $\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$

A4: $(\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \gamma))$

A5: $(\neg\alpha \supset \neg\beta) \supset (\beta \supset \alpha)$

A6: Spezialisierungsaxiome: $\forall \varrho \; \alpha[\varrho] \supset \alpha(\tau)$

Ersetze alle ϱ's durch τ (τ frei für ϱ in $\alpha[\varrho]$)

A7: Axiome der hinteren Generalisierung: $\forall \varrho (\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \forall \varrho \beta)$

wenn ϱ in α nicht frei vorkommt

Regeln:

- Modus Ponens

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \\ \alpha \supset \beta\end{array}}{\beta}$$

- Generalisierung

$$\frac{\alpha}{\forall_e \alpha}$$

4.6.2007

Axiomensystem:

Ein System, dass aus Axiomen und Transformationen besteht.

Ziel: Überblick und Struktur der möglichen Sätze. Gewünscht:

- widerspruchsfreiheit: Alles was bewiesen werden kann ist auch wahr
- vollständigkeit: Alle wahren Theoreme können bewiesen werden

Historisch: Geometrie (euklidische Geometrie)

Axiom der Parallele (geg. Punkt u. Gerade gibt es genau eine Parallele zu g) war problematisch.

Im 19. Jh. konnte gezeigt werden, dass das Axiom nicht beweisbar aus den übrigen Axiomen ist ("unabhängig").

D.h. die Formalisierung des Satzes ist logisch kontingent: Es gibt Interpretationen, bei denen alle Ax. der euklidischen Geometrie und ~~das~~ Parallelenaxiom wahr ist, und solche, ~~die~~ bei denen die Ax gelten und nicht das Parallelenaxiom gilt.

HA: Ist die Geometrie vollständig?, S. 96/97 im Detail lesen

Kap 5

Induktion nach dem Aufbau von Formeln

Basiselemente: alle Atomaren Formeln

Aufbauende Elemente: Sukzessive Konstruktion der Negationsbildung, Subjunktionsbildung, Allquantifikation

Beispiel:

Beh: Für jede Formel $\alpha[\varrho]$ gilt: ist $\mathfrak{I} = \langle D, V \rangle$ eine bel. Interpretation mit $V(\varrho) = V(\tau)$, so gilt $V(\alpha[\varrho]) = V(\alpha[\tau])$

Bew.:

Induktionsanfang: 3 mögliche Typen atomarer Formel

a) α ist Satzbuchstabe (trivial)

b) $\alpha : \tau_1 = \tau_2$ (beweisbar)

c) $\alpha : \Pi \tau_1 \dots \tau_n$ (beweisbar)

Induktionsschritt: wieder 3 Fälle

a) $\alpha : \neg \beta[\varrho]$ (beweisbar)

b) $\alpha : \beta[\varrho] \supset \gamma[\varrho]$ (beweisbar)

c) $\alpha : \forall \sigma\, \beta[\sigma; \varrho]$ (beweisbar)

Beweis der Widerspruchsfreiheit: Teiltermeinduktion

- Axiome sind gültig
- aus gültigen Theoremen werden mit den Transformationen wieder gültige Theoreme

"Axiome" sind nur Axiomenschemata (bei Nortmann Axiomentyp)

11.6.07

Wahrheit in der Geometrie: Sätze sind geometrisch wahr, wenn er für alle Interpretationen wahr ist, für die auch die Axiome wahr sind. F ⊩ Axiome

Eine Formel p folgt (semantisch, ⊩) aus einer Formel q genau dann, wenn für jedes Modell von q gilt, dass es auch ein Modell von p ist.

Eine Formel F in der Sprache der Geometrie ist geometrisch wahr, genau dann, wenn für jede Interpretation von F, bei der alle Hilbertaxiome wahr sind, auch eine Interpretation ist, bei der F ebenfalls wahr ist

HA ⊩ F

oder (problematisch)

Eine Formel F ist geometrisch wahr genau dann, wenn jede Interpretation I, bei der F wahr wird, zugleich eine Interpretation ist, bei der alle HA ebenfalls wahr sind.

$F \Vdash HA$

18.6.07

<u>Vorgehensweise bei der Untersuchung der Vollst. d. Geometrie</u>

1. Syntaktische Festlegung der Sprache der Geometrie (echte Teilmenge der Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe)
2. Semantik / Wahrheitsbegriff
   Menge I_G zulässiger Interpretationen: wiederum Teilmenge aller prädikatenlog. zul. Interpretationen
3. Formel α der Sprache der Geometrie ist wahr, genau dann, wenn α wahr ist bei jeder zulässigen Interpr. (aus I_G)
4. $I_G \Vdash \alpha \quad \Rightarrow \quad HA \vdash \alpha \quad \Leftarrow \quad HA \Vdash \alpha$

wenn die Menge der zulässigen Interpretationen unter Bezugnahme auf ein Axiomensystem geschieht[1] (siehe Def. oben), ist die Vollständigkeit trivial, sonst nicht.

---

[1] ~~Eine Fo~~ Zulässige Interpretationen sind solche, bei denen die Axiome und jede Folgerung aus den Axiomen wahr ist.

Deduktionstheorem

$\Gamma \cup \alpha \vdash \beta \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \alpha \supset \beta$

$\alpha \vdash \beta \quad \Rightarrow \quad \vdash \alpha \supset \beta$

syntaktisch ist dies nicht trivial, semantisch schon:

$\alpha \Vdash \beta \quad \Rightarrow \quad \Vdash \alpha \supset \beta$

Allgemein laufen die behandelten Hilfssätze darauf hinaus, zu zeigen, dass den semantische Formeln syntaktische entsprechen

Insgesamt soll ja bewiesen werden:

"$\Vdash$" $\Leftrightarrow$ "$\vdash$"

ω-Vollständigkeit

Was bedeutet ω-Vollständigkeit für Allsätze?

$\exists x (F^1 x) \Leftrightarrow \neg \forall x \neg F^1 x$

Was ist mit $\forall x F^1(x)$?

24.6.07

Vollständigkeitsbeweis von KPL (übersicht)

"Ist α eine allgemeingültige prädikatenlogische Formel, so gilt $\vdash_{KPL} \alpha$ – oder gleichwertig: Ist α eine KPL-konsistente prädikatenlogische Formel, so gibt es ein Modell für α, d.h. eine Interpretation $I = \{O, V\}$ mit $V(\alpha) = w$"

Beide Sätze sind aus folgenden Gründen gleichwertig:

Der erste Satz hat die Form

$\forall x\, F^1_x \supset G^1 x$ mit F^1: Allgemeingültigkeit
G^1: KPL-Beweisbarkeit

Nun lässt sich ableiten

$\forall x\, (\neg G^1 x \supset \neg F^1_x)$

$\neg G^1 x$ bedeutet, dass x nicht beweisbar ist, also, dass $\neg x$ konsistent ist.

$\neg F^1_x$ bedeutet, dass nicht jedes Modell x erfüllt. Da jedes Modelle entweder x oder $\neg x$ erfüllt, bedeutet dies, dass es mind. ein Modelle gibt, welches $\neg x$ erfüllt. Mit $\alpha = \neg x$ ist dies der zweite Satz.

Im Beweis wird auf jenen zweiten Satz hingearbeitet. Es ist also zu zeigen, dass wenn eine Formel α konsistent ist, es eine Interpretation mit $V(\alpha) = w$ gibt.

Es wird konkret ein Modelle für eine bel. kons. Formel konstruiert.

- Für den Individuenbreich des Modells wird folgendes angesetzt:
  - zu α gehört eine ω-vollst. Menge Γ (Lindenbaum)
  - $\bar{\varrho} := \{\sigma \mid (\varrho = \sigma) \in \Gamma\}$
  - $D = \{\bar{\varrho} \mid \varrho$ ist ein Individuenzeichen$\}$

Bemerkung: $\bar{e}$ ist eine Äquivalenzklasse zu e

- Als zweites ist eine Bewertungsfunktion V anzugeben

Die Bestimmung geschieht in 5 Punkten:

1.) Für Individuenzeichen e: $V(e) := \bar{e}$

2.) Für n-stelligen Funktor φ:

$$V(\varphi)(\bar{e}_1 .. \bar{e}_n) := \bar{e} \mid e = \varphi(e_1 .. e_n) \text{ ist in } \Gamma$$

3.) $V(=) := \{ \langle \bar{e}, \bar{e} \rangle \mid e$ ist ein Individuenzeichen $\}$

4.) Für n-stelligen Prädikatsbuchstaben π:

$V(\pi) := \{ \langle \bar{e}_1 .. \bar{e}_n \rangle \mid e_1 .. e_n$ sind Individuenzeichen, sodass $\pi e_1 .. e_n$ in Γ ist$\}$

5.) Für Aussagebuchstaben β:

$$V(\beta) := \begin{cases} w, & \text{falls } \beta \in \Gamma \\ f, & \text{sonst} \end{cases}$$

„Nachdem damit die Funktion V auf den Grundzeichen erklärt ist, wird sie auf komplexe Ausdrücke so fortgesetzt, dass die Anforderungen an eine prädikatenlogische Bewertungsfunktion über D erfüllt sind."

25.1.07

Für die ω-vollst. Menge Γ lässt sich zeigen, dass aus ihr eine Interpretation gewonnen werden kann, dass alle Formeln aus Γ mit wahr bewertet werden. Damit ist insb. auch α mit wahr bewertet

"Termmodell": Modell, in dem jeder Term auf sich selbst abgebildet wird

Unter $I = \langle D, V \rangle$ wird durch V jeder Term aus D auf sich selbst abgebildet: $V(t) = t \; (\in D)$

Von Gleichheitszeichen abgesehen ist die Wahrheitsbewertung von Formeln recht simpel.
Für die Wahrheitsbewertung von Existenzsätzen muss die konkrete Eigenschaft der ω-Konsistenz herangezogen werden

Ohne Gleichheit ist der Beweis nicht schwierig:
- Bilde Γ nach Lindenbaum
- jeden Term auf sich selbst
- jedes Prädikat auf n-Tupel, sodass das Prädikat gefolgt von den n Termen in Γ vorkommt

Schwierigkeit der Gleichheit:
Es wird nötig, die Äquivalenzrelation für $\bar{=}$ zu benutzen

Äquivalenzklasse: Jeder Term t_i wird auf die Menge von Termen t_j abgebildet, ~~die~~ sodass es in Γ eine Formel vorkommt, sodass $t_i = t_j$
Dies ist gegeben durch Hs. 5.17
Dadurch tritt noch eine weitere Komplikation auf: verschiedene Terme können Repräsentanten sein für dasselbe Objekt. Es muss nun immer noch gezeigt werden, dass die Wahl eines konkreten Repräsentanten keinen Einfluss hat.

ω-Vollständigkeit und das Lindenbaum-Lemma

ω-Vollständigkeit: Formelmenge Γ ist vollständig, wenn gilt: $\exists \varrho\, \alpha$ ist in Γ, dann gibt es auch eine Individuenvariable σ, sodass $Sub_\varrho^\sigma \alpha \in \Gamma$ ist.

Eine Existenzquantisierung soll durch mindestens eine in Γ vorkommende Instantiierung gedeckt werden.

Maximale Konsistenz: das Hinzufügen einer weiteren Formel α zu Γ würde Γ inkonsistent machen.

Lindenbaum-Lemma: Ist α eine konsistente Formel, so gibt es eine maximal konsistente, ω-Vollständige Formelmenge Γ mit $\alpha \in \Gamma$

Beweis erfolgt durch Konstruktion von Γ:

ε_i sei eine Abzählung der Existenzformeln: $\varepsilon_i := \exists \varrho \beta$

$\Lambda_0 := \{\alpha\}$ $\qquad \Lambda_i = \Lambda_{i-1} \cup \{\underbrace{\exists \varrho \beta}_{\varepsilon_i} \to Sub_\varrho^\sigma \beta\}$

$\Lambda = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Lambda_i$

α_i sei eine Abzählung sämtlicher präd-logisch Formeln

$\Gamma_0 = \Lambda \qquad \Gamma_i = \begin{cases} \Gamma_{i-1} \cup \{\alpha_i\} & \text{falls } \Gamma_i \text{ konsistent} \\ \Gamma_{i-1} & \text{sonst} \end{cases}$

$\Gamma = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$

FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Philosophie

Proseminar: Gödels Theoreme und die Logik
BA: Basismodul Sprachphilosophie
Seminarleiter: Holm Tetens
Sommersemester 2007

Zum Vollständigkeitssatz und seinem Beweis

(A) Das Beweisziel: Der Vollständigkeitssatz für die klassische Prädikatenlogik erster Stufe beinhaltet die Behauptung:

1. *Es gibt vollständige axiomatische Systeme für die klassische Prädikatenlogik erster Stufe. Wenn α eine allgemeingültige Formel der klassischen Prädikatenlogik erster Stufe ist, so ist α in dem axiomatischen System KPL (und anderen mit ihm äquivalenten Systemen) beweisbar.*

Nun sind folgende Sätze logisch äquivalent:

1. *Wenn α eine allgemeingültige Formel der klassischen Prädikatenlogik erster Stufe ist, so ist α unter anderem in dem axiomatischen System KPL beweisbar.*
2. *Wenn $\neg\neg\alpha$ eine allgemeingültige Formel der klassischen Prädikatenlogik erster Stufe ist, so ist $\neg\neg\alpha$ im axiomatischen System KPL beweisbar.*
3. *Wenn $\neg\neg\alpha$ im axiomatischen System KPL nicht beweisbar ist, so ist $\neg\neg\alpha$ keine allgemeingültige Formel der klassischen Prädikatenlogik erster Stufe.*
4. *Wenn $\neg\alpha$ konsistent ist, so gibt es eine Interpretation I, unter der $\neg\alpha$ wahr ist.*

Daher ist der Vollständigkeitssatz bewiesen, falls bewiesen werden kann:

5. *Jede konsistente Formel der klassischen Prädikatenlogik erster Stufe besitzt mindestens eine Interpretation, unter der sie wahr ist.*

(B) Die Grundidee des Beweises: Der Satz 5 ist bewiesen, sobald die nachfolgenden Sätze 6 und 7 bewiesen sind. Sei α eine konsistente Formel der klassischen Prädikatenlogik erster Stufe. Dann gilt:

6. *α kann in eine maximal konsistente und ω-vollständige Formelmenge Γ eingebettet werden.*

7. *Für die maximal konsistente und ω-vollständige Formelmenge Γ lässt sich eine Interpretation $I_\Gamma = \langle D_\Gamma, V_\Gamma \rangle$ derart konstruieren, dass für jede prädikatenlogische Formel β gilt: $V_\Gamma(\beta)$ = wahr genau dann, wenn $\beta \in \Gamma$ und $V_\Gamma(\beta)$ = falsch genau dann, wenn $\beta \notin \Gamma$.*

(C) Die Einbettung einer konsistenten Formel in eine maximal konsistente und ω-vollständige Formelmenge: Sei α eine konsistente prädikatenlogische Formel. Die Menge aller syntaktisch wohlgeformten prädikatenlogischen Formeln ist abzählbar. Sei α_i (i natürliche Zahl größer Null) eine solche Abzählung aller wohlgeformten prädikatenlogischen Formeln. Auch ist die Menge aller syntaktisch wohlgeformten Existenzformeln der Form $\exists\rho\beta$ mit einer Individuenvariablen ρ und einer prädikatenlogischen Formel β abzählbar. Sei δ_i (i natürliche Zahl größer 0) eine solche Abzählung der Existenzformeln. Es gilt:

6.1 *Es kann eine abzählbare Folge von Formelmengen Δ_i nach folgender Vorschrift konstruiert werden:*

$$\Delta_0 = \{\alpha\}$$
$$\Delta_i = \Delta_{i-1} \cup \{\delta_i (\equiv \exists\rho\beta) \supset Sub_\rho^\sigma \beta\}$$

Dabei ist σ eine Individuenvariable, die weder in einer der Formeln aus den Mengen $\Delta_0, \ldots, \Delta_{i-1}$ noch in der Formel δ_i vorkommt. Eine solche Individuenvariable gibt es immer.

6.2 *Es kann die Vereinigung Δ aller Mengen Δ_i gebildet werden:*

$$\Delta = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta_i .$$

6.3 *Es gilt: Die Menge Δ ist konsistent.*

6.4 *Es kann eine abzählbare Folge Γ_i von Formelmengen nach folgender Vorschrift gebildet werden:*

$$\Gamma_0 = \Delta$$

$$\Gamma_i = \begin{cases} \Gamma_{i-1} \cup \{\alpha_i\}, \text{falls } \Gamma_{i\text{-}1} \cup \{\alpha_i\} \text{ konsistent,} \\ \Gamma_{i\text{-}1}, \text{sonst.} \end{cases}$$

6.5 *Es kann die Vereinigung Γ dieser Formelmengen Γ_i gebildet werden:*

$$\Gamma = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$$

6.6 *Nach Konstruktion ist die Formelmenge Γ maximal konsistent und ω-vollständig und es gilt: $\alpha \in \Gamma$.*

(D) Die Konstruktion der Interpretation I_Γ: Die Konstruktion der Interpretation wird viel durchsichtiger, wenn man sich zunächst auf die klassische Prädikatenlogik erster Stufe ohne Identität und ohne Funktoren beschränkt.

7.1 *Als Grundbereich D_Γ wählt man die Menge aller Terme in der Sprache der klassischen Prädikatenlogik erster Stufe. Es gilt also: $V_\Gamma(\tau) = \tau$ für jeden Term τ.*

7.2 *Sei φ ein n-stelliger Prädikatausdruck. Dann definiert man:*

$$V_\Gamma(\varphi) =_{def} \{<\tau_1,...,\tau_n>: \tau_i \in D \text{ } \textit{für } 1 \leq \text{i} \leq \text{n und } \varphi\tau_1...\tau_n \in \Gamma\}$$

7.3 *Es gilt dann:*

$$V_\Gamma(\varphi\tau_1...\tau_n) = wahr \Leftrightarrow <V_\Gamma(\tau_1),...,V_\Gamma(\tau_n)> \in V_\Gamma(\varphi) \Leftrightarrow \varphi\tau_1...\tau_n \in \Gamma$$
$$V_\Gamma(\varphi\tau_1...\tau_n) = falsch \Leftrightarrow <\mathrm{V}_\Gamma(\tau_1),...,V_\Gamma(\tau_n)> \notin V_\Gamma(\varphi) \Leftrightarrow \varphi\tau_1...\tau_n \notin \Gamma.$$

7.4 *Für jede prädikatenlogische Formel α gilt:*

$$\alpha \in \Gamma \Leftrightarrow \neg\alpha \notin \Gamma \textit{ und } \alpha \notin \Gamma \Leftrightarrow \neg\alpha \in \Gamma$$

7.5 *Daher lässt sich für jede prädikatenlogische Formel α definieren:*

$$V_\Gamma(\neg\alpha) = wahr \Leftrightarrow_{def} \neg\alpha \in \Gamma \Leftrightarrow \alpha \notin \Gamma \Leftrightarrow \mathrm{V}_\Gamma(\alpha) = falsch.$$

7.6 *Für zwei beliebige prädikatenlogische Formeln α und β gilt:*

$$\alpha \wedge \beta \in \Gamma \Leftrightarrow \alpha \in \Gamma \text{ und } \beta \in \Gamma$$

7.7 *Daher lässt sich definieren:*

$$V_\Gamma(\alpha \wedge \beta) = wahr \Leftrightarrow_{def} \alpha \wedge \beta \in \Gamma \Leftrightarrow \alpha \in \Gamma \text{ und } \beta \in \Gamma \Leftrightarrow \mathrm{V}_\Gamma(\alpha) = wahr \text{ und } \mathrm{V}_\Gamma(\beta) = wahr.$$

7.8 *Wegen der ω-Vollständigkeit von Γ gibt es für jede Existenzformel $\exists\rho\beta$ eine Individuenvariable σ, sodass gilt:*

$Sub_\rho^\sigma\beta \in \Gamma$

7.9 *Daher lässt sich für jede Existenzformel $\exists\rho\beta$ definieren:*

$V_\Gamma(\exists\rho\beta) = wahr \Leftrightarrow_{def} \exists\rho\beta \in \Gamma \Leftrightarrow$ Es gibt eine Individuenvariabe σ mit $Sub_\rho^\sigma\beta \in \Gamma \Leftrightarrow V_\Gamma(Sub_\rho^\sigma\beta) = wahr$.

7.10 *Damit gilt insgesamt für jede prädikatenlogische Formel β:*

$V_\Gamma(\beta) = wahr \Leftrightarrow \beta \in \Gamma$ *und* $V_\Gamma(\beta) = falsch \Leftrightarrow \beta \notin \Gamma$.

7.11 *Damit aber ist V_Γ eine zulässige prädikatenlogische Bewertung, die für jede prädikatenlogische Formel auch tatsächlich definiert ist.*

(E) Einbeziehung der Identität: Die Konstruktion des Modells $I_\Gamma=<D_\Gamma,V_\Gamma>$ gestaltet sich etwas komplizierter, sobald Funktoren und Identitätsformeln im Spiel sind, weil dann nicht mehr jeder Term auf sich selbst abgebildet werden darf, da sonst die Identitätsformeln aus Γ bei der Interpretation falsch würden. Daher müssen Terme τ_1 und τ_2, für die in Γ eine Identitätsformel $\tau_1=\tau_2$ enthalten ist, auf dasselbe Objekt abgebildet werden. Die einfachste Lösung ist dafür aber nun, jedem Term τ die Menge aller Terme τ_i zuzuordnen, für die eine Identitätsformel $\tau=\tau_i$ in Γ vorkommt.

8.1 $V_\Gamma(\tau)=_{def}\{\tau_i$: *$\tau_i$ ist ein Term und* $\tau=\tau_i\in\Gamma\}$.

8.2 *Damit ist D_Γ nicht mehr die Menge aller Terme, sondern eine Teilmenge der Potenzmenge aller Terme.*

8.3 *Für zwei Terme τ_1 und τ_2 gilt: Entweder $V_\Gamma(\tau_1)=V_\Gamma(\tau_2)$ oder $V_\Gamma(\tau_1)\cap V_\Gamma(\tau_2)=\varnothing$, d.h. D_Γ ist eine Zerlegung der Menge aller Terme in ein überdeckendes System disjunkter Teilmengen.*

Es werden nun die Definitionen und Beweisschritte 7.2 bis 7.11 unter Einschluss der Identität als ausgezeichnetes zweistelliges Prädikat auf der Grundlage von Definition 8.1 wiederholt. Dabei entsteht eine einzige beweistechnische Komplikation. Es muss nämlich der folgende Satz gelten:

8.4 *Für jede Definition und jeden Satz $S(\ldots\tau\ldots)$ bzw. $S(\ldots V_\Gamma(\tau)\ldots)$, die bzw. der in strenger Analogie zu den Schritten 7.2-7.11 bei der Konstruktion der Bewertungsfunktion V_Γ vollzogen werden und in denen auf einen Term τ bzw. auf seine Bewertung $V_\Gamma(\tau)$ Bezug genommen wird, gilt: Für jeden Term τ_i mit $V_\Gamma(\tau)=V_\Gamma(\tau_i)$ gilt. Wenn $S(\ldots\tau\ldots)$, dann gilt auch $S(\ldots\tau_i\ldots)$; bzw. Wenn $S(\ldots V_\Gamma(\tau)\ldots)$, dann gilt auch $S(\ldots V_\Gamma(\tau_i)\ldots)$, d.h. die Definitionen und Sätze für die Konstruktion des Modell $I_\Gamma=<D_\Gamma,V_\Gamma>$ sind unabhängig davon, durch welchen Term ein Objekt aus D_Γ repräsentiert wird.*

Dies im Einzelnen zu beweisen, verlangt einen gewissen Aufwand, ändert aber nichts an der grundsätzlichen Konstruktion, wie sie für die klassische Prädikatenlogik erster Stufe ohne Identität einfacher und transparenter durchgeführt werden kann.

Kapitel 7: Unvollständigkeitssatz

Theorie 1. Ordnung

S. 159

- Vokabular : wie Prädikatenlogik
- Syntax : —— " ——
- Axiomatik : KPL + Theorieeigene Axiome, Modus Ponens + Generalisierungsregel sind einzige Beweisregeln

Konsistenz / ω - Konsistenz

S. 165

Konsistenz: kein α, sodass $\vdash_T \alpha$ und $\vdash_T \neg\alpha$

ω-Konsistenz: für Theorien, die mind. PA umfassen

(mit $F_1^1 e$: e ist eine nat. Zahl, $s(e)$: Nachfolger von e)

kein α, sodass $\vdash_T \exists e (F_1^1 e \wedge \alpha[e])$
und $\vdash_T \neg\alpha[\bar{n}]$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Geschlossenheit und Überschaubarkeit

S. 166

Geschlossenheit: Formel, in der keine Variable frei vorkommt

Überschaubarkeit: Bei einem gegebenen Satz muss algorithmisch entscheiden können, ob er ein Axiom ist oder nicht
mathematisch exakt: rekursive Axiomatisierung

Gödelnummerierung

S. 173

T-Ausdruck $\longrightarrow$ $n \in \mathbb{N}$

$$g(\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r) = 2^{g(\varepsilon_0)} \cdot 3^{g(\varepsilon_0)} \cdot \ldots \cdot p_r^{g(\varepsilon_r)}$$

mit über Primzahlen eindeutig zugeordnetem $g(\varepsilon)$ für elem. Zeichen

Diagonalisierungsfunktion

S. 175

Zu Theorie T mit Gödelnummerierung g_T gehörige Funktion

$\mathcal{D} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\mathcal{D}(n) = \begin{cases} g_T(\mathrm{Sub}_{x_1}^{\bar{n}}\ \alpha[x_1]) &, n = g(\alpha[x_1]) \text{ falls } \alpha[x_1] \text{ in } T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

F-Repräsentierbarkeit

S. 175 / 178

Gegeben Funktion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$

f ist in T repräsentierbar, falls es T-Aussage α gibt, sodass wenn $f(k_1 .. k_n) = m$ ist, gilt

$\vdash_T \alpha[\bar{k}_1 .. \bar{k}_n, \bar{m}]$ — α ist ableitbar für die passenden Werte

$\vdash_T \exists! m\ \alpha[\bar{k}_1 .. \bar{k}_n, \bar{m}]$ — α ist nur herleitbar für die passenden Werte

Allgemein: für n-stellige Relation zwischen natürlichen Zahlen ist diese Relation R in T repräsentierbar, wenn gilt:

$R^n k_1 .. k_n \Rightarrow \vdash_T \alpha[\bar{k}_1 .. \bar{k}_n]$

$\neg R^n k_1 .. k_n \Rightarrow \vdash_T \neg\alpha[\bar{k}_1 .. \bar{k}_n]$

Diagonalisierungssatz

Für T mit $\mathcal{F}$-repräsentierbarer Diagonalisierungsfunktion $\mathfrak{D}$:
Für beliebige T-Aussage $\beta[x_1]$ gibt es eine geschl. T-Aussage σ mit

$$\vdash_T \sigma \equiv \beta[\ulcorner \sigma \urcorner]$$

Die Formel σ sagt von sich selbst, dass sie die mit β bezeichnete Eigenschaft hat. Zu jeder denkbaren Eigenschaft gibt es eine solche Formel.

Rekursive Funktionen

Grundfunktionen: Nachfolgerfunktion, Nullfunktion, Projektions-funktionen

Erzeugungsoperationen: Ineinandersetzung, Rekursion, Minimumsbildung

rekursive Relation: Relation ist rekursiv, wenn die ihr zugehörige "charakteristische Funktion" rekursiv ist.

char. Funktions f ordnet Zahlen $k_1 .. k_n$ den Wert 0 zu, falls sie in Relation R stehen, und den Wert 1, falls sie es nicht tun

FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Philosophie

Proseminar: Gödels Theoreme und die Logik
BA: Basismodul Sprachphilosophie
Seminarleiter: Holm Tetens
Sommersemester 2007

Skizze des Beweises für den Unvollständigkeitssatz

(I) **Gödelisierung der Ausdrücke des formalen Systems:**

(a) Jeder endlichen Folge von Grundzeichen, damit jedem Ausdruck α des formalen Systems wird eindeutig eine natürliche Zahl $g(\alpha)$ zugeordnet. Die Gödelisierung ist so zu wählen, daß bestimmte Prädikate über die Gödelzahlen von Ausdrücken rekursive Prädikate sind (siehe II)

(b) Die Gödelisierung basiert auf der Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung natürlicher Zahlen. Der Grundgedanke ist einfach: S.173

(i) Den Grundzeichen $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ werden bestimmte natürliche Zahlen $g(\gamma_1),\ldots,g(\gamma_n)$ zugeordnet.

(ii) Sind den Ausdrücken $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ die Gödelzahlen $g(\alpha_1),\ldots,g(\alpha_m)$ zugeordnet, so wird der Konketenation (Zei-chenfolge) $\alpha_1*\ldots*\alpha_m$ die Gödelzahl

$$g(\alpha_1*\ldots*\alpha_m) = 2^{g(\alpha_1)}\cdot 3^{g(\alpha_2)}\cdot\ldots\cdot p_m^{g(\alpha_m)}$$

zugeordnet, wobei p_m die m-te Primzahl ist.

(II) **Die Definition rekursiver Prädikate:**

(a) Ein für natürliche Zahlen definiertes zahlentheoretisches Prädikat „P(....)" ist rekursiv genau dann, wenn es eine rekursive Funktion Γ gibt, derart daß

$$\forall x_1\ldots\forall x_n(\ P(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \Gamma(x_1,\ldots,x_n)=0\ )$$

(b) Rekursive Funktionen werden selber rekursiv definiert:

(i) Rekursive Basisfunktionen sind:
$\forall x_1\ldots\forall x_n.C(x_1,\ldots,x_n)=C$. (C ist eine Konstante)
$\forall x_1\ldots\forall x_n.P_i(x_1,\ldots,x_n)=x_i$.
$\forall x.N(x)=x+1$.

(ii) Ist Γ_1 eine n-1 stellige und Γ_2 eine n+1-stellige rekursive Funktion, so ist die Funktion Γ mit
$\Gamma(0,x_2,\ldots,x_n)=\Gamma_1(x_2,\ldots,x_n)$
$\Gamma(m+1,x_2,\ldots,x_n)=\Gamma_2(m,\Gamma(m,x_2,\ldots,x_n),x_2,\ldots,x_n)$
eine n-stellige rekursive Funktion.

(iii) Ist Γ_0 eine n-stellige rekursive Funktion und sind $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n$ m-stellige rekursive Funktionen, so ist die Funktion Γ mit
$\Gamma=\Gamma_0(\Gamma_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,\Gamma_n(x_1,\ldots,x_m))$
eine m-stellige rekursive Funktion.

(III) **Darstellung gewisser metatheoretischer Prädikate durch Formeln des formalen Systems**:

(a) Metatheoretische Prädikate „MP(...)" über Ausdrücke des formalen Systems können ersetzt werden durch zahlentheoretische Prädikate „ZMP(...)" nach folgender Definitionsvorschrift:
$\forall x_1\ldots\forall x_n(ZMP(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow_{def} MP(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\wedge g(\alpha_1)=x_1\wedge\ldots\wedge \wedge g(\alpha_n)=x_n$
Das Prädikat „ZMP(...)" heiße dann die „Gödelisierung" des metatheoretischen Prädikats „MP(...)".

(b) Der über eine lange Definitionskette für rekursive Prädikate und Funktionen laufende Nachweis, daß die Gödelisierung des metatheoretischen Prädikats „die Formelreihe α ist kein Beweis der Formel, die entsteht, wenn man in der Formel ϕ die einzige freie Variable durch die Gödelzahl $g(\phi)$) ersetzt" ein rekursives Prädikat ergibt.

(c) Nachweis, daß das betrachtete formale System so stark ist, daß es für jede rekursive zahlentheoretische Relation „R(....)" eine Formel „ϕ(....)" des formalen Systems gibt, so daß gilt:
Repräsentierbarkeit
(1) $R(x_1,\ldots,x_n)\rightarrow\vdash\phi(z(x_1),\ldots,z(x_n))$
(2) $\neg R(x_1,\ldots,x_n)\rightarrow\vdash\neg\phi(z(x_1),\ldots,z(x_n))$
Dabei ist „$z(x_i)$" die Ziffer, also ein Name (Darstellung) der natürlichen Zahl x_i in dem formalen System.

(IV) **Konstruktion der Gödelformel**

(a) Man betrachte das gemäß III (b) als rekursiv nachgewiesene Prädikat, das Gödelisierung eines metatheoretischen Prädikats ist: $\neg BEW(x_1,x_2) \equiv_{def}$ die Formel α_1 mit der Gödelzahl $g(\alpha_1)=x_1$ ist kein Beweis derjenigen Formel, die entsteht, wenn man in der Formel α_2 mit der Gödelzahl $g(\alpha_2)=x_2$ die freie Variable durch eben diese Gödelzahl x_2 ersetzt.

(b) Da dieses Prädikat rekursiv ist, gibt es im formalen System eine Formel „$\Psi(v_1,v_2)$", so daß gilt:
(3) $\neg BEW(x_1,x_2)\rightarrow\vdash\Psi(z(x_1),z(x_2))$
(4) $BEW(x_1,x_2)\rightarrow\vdash\neg\Psi(z(x_1),z(x_2))$

(c) Konstruktion der folgenden Formel:

$$\forall v_1 \Psi(v_1, g(\forall v_1 \Psi(v_1,v_2)))$$

Diese Formel heiße „Gödelformel".

(d) Liest man diese Formel als entsprechende Repräsentation des gödelisierten metatheoretischen Prädikats, so besagt sie:

> die Formel, die entsteht, wenn man in der Formel mit der Gödelzahl $g(\forall v_1 \Psi(v_1,v_2))$, also in der Formel „$\forall v_1 \Psi(v_1,v_2)$" die freie Variable v_2 durch die Gödelzahl $g(\forall v_1 \Psi(v_1,v_2))$ ersetzt , ist im System unbeweisbar.

Die Formel, die entsteht, wenn man in der Formel mit der Gödelzahl $g(\forall v_1 \Psi(v_1,v_2))$, also in der Formel „$\forall v_1 \Psi(v_1,v_2)$" die freie Variable v_2 durch die Gödelzahl $g(\forall v_1 \Psi(v_1,v_2))$ ersetzt, ist aber gerade die Formel „$\forall v_1 \Psi(v_1, g(\forall v_1 \Psi(v_1,v_2)))$", also die Gödelformel.

(e) Mithin besagt die Gödelformel „$\forall v_1 \Psi(v_1,g(\forall v_1 \Psi(v_1,v_2)))$" als Repräsentation eines entsprechend gödelisierten Metaprädikats im formalen System gelesen: Die Gödelformel ist im System unbeweisbar.

(V) Definition der ω-Widerspruchsfreiheit (ω-Konsistenz)

(a) Es wird eine gegenüber der gewöhnlich definierten Widerspruchsfreiheit verschärfte Form der Widerspruchsfreiheit,die ω-Widerspruchsfreiheit verlangt. Eine formales System ist ω-widerspruchsfrei, wenn gilt: Es gibt keine zahlentheoretische Formel „ϕ", so daß $\vdash \phi(1)$, $\vdash \phi(2)$, $\vdash \phi(3)$.... auf jede natürliche Zahl zutrifft und zugleich $\vdash \neg\forall x \phi(x)$ gilt.

(b) Ein ω-widerspruchsfreies System ist insbesondere widerspruchsfrei im herkömmlichen Sinne. Das Umgekehrte gilt nicht.

(VI) Beweis der Unentscheidbarkeit der Gödelformel

(a) Angenommen die Gödelformel wäre beweisbar. Dann gibt es eine Formelreihe α mit der Gödelzahl $g(\alpha)=n$, die Beweis der Gödelformel ist, d.h. derjenigen Formel, die entsteht, wenn man in der Formel „$\forall v_1 \Psi(v_1,v_2)$" die freie Variable v_2 durch die Gödelzahl $g(\forall v_1 \Psi(v_1,v_2))$ ersetzt. Also trifft auf n und die Gödelzahl $g(\forall v_1 \Psi(v_1,v_2))$

$$(5) \quad BEW(n,g(\forall v_1 \Psi(v_1,v_2)))$$

zu. Nach (4) gilt dann:

$$(6) \quad \vdash \neg\Psi(z(n),z(g(\forall v_1 \Psi(v_1,v_2))))$$

Da die Gödelformel beweisbar ist, gilt

$$(7) \quad \vdash \forall v_1 \Psi(v_1,z(g(\forall v_1 \Psi(v_1,v_2))))$$

Dann gilt durch Allspezialisierung aber auch

$$(8) \quad \vdash \Psi(z(n),z(g(\forall v_1\Psi(v_1,v_2))))$$

Mit (6) und (8) wäre ein Widerspruch im formalen System herleitbar. Das formale System wird als widerspruchsfrei angenommen. Also ist die Gödelformel im System nicht beweisbar.

(b) Angenommen, die Negation der Gödelformel wäre beweisbar. Dann wäre wegen der Widerspruchsfreiheit die Gödelformel nicht beweisbar. Dann gibt es keine natürliche Zahl n, die Gödelzahl eines Beweises für die Gödelformel, also Beweis derjenigen Formel ist, die entsteht, wenn man in der Formel „$\forall v_1\Psi(v_1,v_2)$" die freie Variable v_2 durch die Gödelzahl $g(\forall v_1\Psi(v_1,v_2))$ ersetzt. Also gilt für jede einzelne natürliche Zahl n:

$$(9) \quad \neg BEW(n,g(\forall v_1\Psi(v_1,v_2)))$$

und daher wegen (3)

$$(10) \quad \vdash \Psi(z(n), z(g(\forall v_1\Psi(v_1,v_2))))$$

Da die Negation der Gödelformel beweisbar ist, gilt:

$$(11) \quad \vdash \neg\forall v_1\Psi(v_1,z(g(\forall v_1\Psi(v_1,v_2))))$$

(10) und (11) verletzen aber die unterstellte ω-Widerspruchs-freiheit des formalen Systems. Also ist auch die Negation der Gödelformel nicht beweisbar.

(VII) **Folgerung über Widerspruchsfreiheitsbeweise**

(a) Die metatheoretische Aussage „das formale System F ist widerspruchsfrei" kann definiert werden durch die metatheoretische Aussage „es gibt eine Formel ϕ, und ϕ ist im System nicht beweisbar". Diese Aussage kann über eine Gödelisierung der metatheoretischen Prädikate „x ist eine Formel" und „x ist im System beweisbar" selber im formalen System durch die Formel ϖ dargestellt werden.

(b) Für den Beweis der Unbeweisbarkeit der Gödelformel im System wird nur die Widerspruchsfreiheit (nicht die stärkere ω-Widerspruchs-freiheit) benutzt. Also gilt:
(12) Wenn das System widerspruchsfrei ist, dann ist die Gödelformel nicht beweisbar.

(c) Die Unbeweisbarkeit der Gödelformel wird im System gerade durch die Gödelformel selber dargestellt. Also wird die Aussage (12) im System selber durch die Formel
(13) $\varpi\rightarrow\forall v_1\Psi(v_1, g(\forall v_1\Psi(v_1,v_2)))$
dargestellt.

(d) Der metatheoretisch geführte Beweis für die metatheoretische Aussage (12) kann über die Gödelisierung aller Beweisschritte direkt im formalen System dargestellt werden und stellt dort selber eine korrekte Ableitung im System dar. Es gilt also

(14) $\vdash \varpi \rightarrow \forall v_1 \Psi(v_1, g(\forall v_1 \Psi(v_1,v_2)))$

(e) Angenommen, die Formel ϖ wäre im System beweisbar. Da im System der modus ponens gilt, wäre auch die Gödelformel „$\forall v_1 \Psi(v_1, g(\forall v_1 \Psi(v_1,v_2)))$“ beweisbar, was aber im Widerspruch steht dazu, daß in dem widerspruchsfreien System die Gödelformel nicht beweisbar ist. Also ist die Annahme falsch, die Formel ϖ ließe sich im System beweisen.

(f) Da die Formel ϖ die Widerspruchsfreiheit des Systems „beinhaltet“, bedeutet die Nichtbeweisbarkeit von ϖ im System: Die Widerspruchsfreiheit des Systems kann nicht mit den logischen Mitteln des Systems bewiesen werden.

Literatur:

Originalarbeit in Berka/Kreiser:
Logik-Texte - kommentierte Auswahl zur Gesch.
der mod. Logik. Darmstadt 1983

In diesem Band auch: Tarski, Wahrheitsbegriff
in d. form. Spr.

FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Philosophie

Proseminar: Gödels Theoreme und die Logik
BA: Basismodul Sprachphilosophie
Seminarleiter: Holm Tetens
Sommersemester 2007

Zur Kritik am Argument von Lucas – Ein Beispiel für außermathematische Folgerungen aus dem Unvollständigkeitssatz von Gödel

(A) *Das Argument von Lucas*[1]

1, Annahme: *Der menschliche Geist G ist identisch mit einer Maschine M.*
2. Wenn der menschliche Geist G mit der Maschine M identisch ist, liefert G einen Output, den auch M liefern kann.
3. Der menschliche Geist G liefert als Output unter anderem die Arithmetik unter Einschluss der Theorie rekursiver Funktionen.

---

4. Also liefert die Maschine M als Output die Peano-Arithmetik unter Einschluss der Theorie rekursiver Funktionen.
5. Die Maschine M ist ein formales System.
6. M ist widerspruchsfrei.

---

7. Also ist M ein formales, widerspruchsfreies System, das die Peano-Arithmetik unter Einschluss der Theorie rekursiver Funktionen liefert.
8. Gödels Unvollständigkeitstheorem: Zu jedem formalen, widerspruchsfreien System, das die Peano-Arithmetik unter Einschluss der Theorie rekursiver Funktionen umfasst, gibt es eine wahre arithmetische Aussage, die Gödelformel, die das System nicht als wahr beweisen kann.

---

9. Es gibt mindestens eine wahre arithmetische Aussage, die Gödelformel, die die Maschine M nicht als wahr beweist.
10. Der menschliche Geist G kann der im Gödelschen Beweis enthaltenen Konstruktionsvorschrift folgend die Gödelformel für das Maschinensystem M konstruieren und sie aufgrund der Konstruktion als wahr einsehen.

---

11. Also liefert der menschliche Geist einen Output, den die Maschine M nicht liefert.

---

12. Also ist die Annahme 1 falsch: Der menschliche Geist ist nicht identisch mit einer Maschine.

(B) *Was ist eine Maschine?*

In erster Annäherung könnte man festlegen: Eine Maschine ist ein System, das bestimmten Input zeitabhängig in einen bestimmten Output transformiert. Es gibt also eine Funktion T, sodass für den Output O, den das System produziert, wenn es zum Zeitpunkt t mit dem Input I konfrontiert, gilt: $T(I,t)=O$. Das ist ersichtlich zu wenig. Das Input-Output-Verhalten des Systems sollte sich durch *ein formales System simulieren* lassen. Das bedeutet: Es gibt ein endliches Alphabet Σ. Jedes Paar (I,t) bestehend aus einem möglichen Input I für das System S und einem Zeitpunkt t wird eineindeutig abgebildet („codiert") auf ein Element $\varphi(I,t) \in M \subseteq \Sigma^*$[2] und jeder mögliche Output O wird eineindeutig abgebildet („codiert") auf ein Element $\varphi(O) \in H \subseteq \Sigma^*$. Es gibt nun einen Algorithmus, also eine berechenbare Funktion P von M auf H, sodass für

---

[1] Vgl. J. R. **Lucas**, *Minds, Machines and Gödel,* in: Alan Ross **Anderson** (editor), *Minds and Machines*, Englewood Cliffs/New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1964, S. 43-59; vgl. zur Kritik an Lucas auch: David **Lewis**, *Lucas against Mechanism*; derselbe, *Lucas against Mechanism II*, beide wiederabgedruckt in: David **Lewis**, *Papers in Philosophical Logic*, Cambridge: Cambridge University Press 1998, S. 166-173.

[2] Σ^* bezeichnet die Menge aller so genannten Konketenationen, d.h. aller endlichen Folgen von Zeichen des Alphabets unter Einschluss des so genannten leeren Wortes.

jeden Zeitpunkt t und jeden Input I gilt: $T(I,t)=O$ genau dann wenn $P(\varphi(I,t))=\varphi(O)$. Das läuft aber nach der Churchschen These darauf hinaus, dass ein zeitabhängiger Input-Output-Transformator eine Maschine ist, wenn er bei geeigneter Codierung durch eine Turingmaschine simuliert wird: $T(I,t)=O$ genau dann, wenn die *Turingmaschine*, angesetzt auf den Input $\varphi(I,t)$ nach endlich vielen Schritten $\varphi(O)$ als Output liefert.

(C) *Was muss man wissen, um ein System als Maschine zu identifizieren?*

Man kann darum wissen, dass ein System eine Maschine ist, ohne den Algorithmus für die Input-Output-Transformation explizit als Programm (als rekursive Funktion, als Maschinentafel einer Turing-Maschine) zu kennen. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn gilt:

1. Man kennt von einem neuronalen Netz: Anzahl der Neuronen, die Verbindung zwischen den Neuronen, die Anfangswerte für die Gewichtung der Verbindungen, die Lernregel.
2. Nach einer endlich langen Trainingsphase zeigt das Netz N faktisch dasselbe Input-Output-Verhalten wie ein System S.
3. Aufgrund eines allgemeinen mathematischen Satzes weiß man, dass alle Input-Output-Transformationen, die N nach einer Trainingsphase liefert, durch eine Turing-Maschine simuliert werden können.
4. Trotzdem ist man nicht in der Lage, den Input-Output-Algorithmus explizit als rekursive Funktion, als Programm in einer der höheren Programmiersprachen etc. hinzuschreiben.
5. Gleichwohl ist man zu der These berechtigt, S sei eine Maschine.

(D) *Was heißt es, die metamathematischen Resultate von Gödel zu verstehen?*

Es heißt:

- die Gödelschen Sätze formulieren, den Beweis oder eine Skizze desselben hinschreiben, bestimmte Frage in Bezug auf einzelne Beweisschritte beantworten, den Satz und Beweis auf einige mehr oder weiniger einfache formale Systeme anwenden zu können, und ähnliches mehr.

Es heißt nicht:

- auf jedes beliebige formale System den Gödelschen Satz explizit anwenden und die Gödelformel explizit konstruieren zu können. *Menschen können den Gödelschen Satz verstehen und nachvollziehen, ohne dass Prämisse 9 des Arguments von Lucas auf sie zutreffen muss.*

(E) *Zur zusammenfassenden Kritik des Arguments von Lucas*

Es ist keineswegs ausgeschlossen, jedenfalls nicht durch die Prämissen des Arguments von Lucas ausgeschlossen, dass folgendes gilt:

1. Ein künstliches System S liefert dieselben Input-Output-Transformationen wie der „menschliche Geist".
2. Insbesondere liefert S den Output, den ein Mensch als Verhalten zeigen muss, um von ihm sagen zu dürfen, er verstehe die Gödelschen metamathematischen Resultate und ihre Beweise.
3. Wir wissen abstrakt, dass S eine Maschine ist, ohne den Input-Output-Algorithmus explizit zu kennen.
4. Die Maschine liefert nicht die Gödelformel für jedes beliebige formale System, insbesondere nicht die Gödelformel für sich selbst als formales System, ganz so, wie kein Mensch für jedes System die Gödelformel konstruieren und explizit als wahr einsehen kann.

Entgegen der Konklusion des Arguments von Lucas kann der menschliche Geist also identisch sein mit einer solchen Maschine. Das Argument von Lucas verfehlt sein Beweisziel, weil Prämisse 9 für komplizierte Systeme, wie der Mensch selber eines ist, nicht wahr ist.